JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TERQUEM

Démonstration de deux propositions de M. Cauchy

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 37.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__37_0>

DÉMONSTRATION

DE DEUX PROPOSITIONS DE M. CAUCHY;

Par M. TERQUEM.

Si dans une équation algébrique à coefficients réels on fait varier tous ces coefficients de manière à ce que les racines restent toujours toutes positives, et qu'une fonction symétrique donnée conserve une valeur constante aussi donnée, il est évident que toute autre fonction symétrique des racines atteindra une valeur extrême, maxima ou minima, lorsque toutes les racines deviennent égales. Ainsi, si l'on suppose constante la moyenne arithmétique des racines, alors la somme des carrés des racines atteint sa valeur extrême, en supposant que chaque racine devienne égale à cette moyenne arithmétique. Cette valeur extrême est donc égale à la moyenne arithmétique élevée au carré et multipliée par le nombre des racines. De plus, cette valeur est un minimum. Pour s'en assurer, il suffit de supposer nulles toutes les racines, à l'exception d'une seule. Donc, lorsque les racines sont inégales, la somme de leurs carrés s'élève au-dessus de ce minimum. C'est une proposition énoncée par M. Cauchy (*Cours d'Analyse*, première partie, page 456). Il en est de même pour une puissance quelconque, entière et positive, des racines. La moyenne arithmétique restant toujours constante, le produit des racines a une valeur extrême égale à cette moyenne arithmétique élevée à une puissance marquée par le nombre des racines; et cette valeur est un maximum; car en supposant nulle une racine, le produit des racines se réduit à zéro. Donc lorsque les racines sont inégales, leur produit est toujours inférieur à ce maximum; c'est la seconde proposition de M. Cauchy (*Cours d'Analyse*, pages 457 et 493; tome IV de ce Journal, page 493). Il en est de même pour toute fonction symétrique, lorsque chacun de ses termes renferme au moins deux racines.