JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BINET

Mémoire sur les inégalités séculaires des éléments des planètes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 361-379.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__361_0>

MÉMOIRE

SUR LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES

DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES;

PAR M. J. BINET,

Professeur au Collége de France.

Les recherches suivantes sont principalement relatives aux inégalités séculaires des excentricités, des inclinaisons, des longitudes des périhélies et des nœuds des orbites; elles exigent que l'on ait sous les yeux les équations différentielles qui servent à déterminer ces variations. Je vais rapporter ces équations, que l'on doit à Lagrange et à Laplace. Pour les former, j'emploierai la méthode suivie par Lagrange, et qu'il a déduite, comme application, de sa théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique. Dans cette nouvelle exposition, Lagrange est parvenu à plusieurs résultats généraux remarquables, et sur lesquels doivent s'appuyer les propositions que je me propose d'établir. Je supposerai toujours l'approximation bornée à la première dimension des forces perturbatrices.

1. Soient m la masse d'une planète,
$2a$ le grand axe de son orbite,
ε l'époque de l'anomalie moyenne,
e l'excentricité,
ϖ la longitude de son périhélie,
γ l'inclinaison de l'orbite sur un plan fixe,
θ la longitude de son nœud sur ce plan;

on posera encore, pour simplifier les équations différentielles qui doivent déterminer les quatre derniers éléments,

$$h = e \sin \varpi, \qquad l = e \cos \varpi;$$
$$p = \gamma \sin \theta, \qquad q = \gamma \cos \theta.$$

e et γ seront regardés comme des quantités assez petites pour que l'on néglige les puissances supérieures relativement aux inférieures. On dénotera, selon l'usage, par m', a', e', etc.; m'', a'', etc., les quantités analogues relatives aux autres planètes.

Les équations différentielles dont dépendent les quantités h, l, h', l', etc., p, q, p', q', etc., exigent, pour leur formation, que l'on compose en premier lieu deux fonctions distinctes de ces éléments, savoir :

$$\mathrm{H} = \tfrac{1}{2}\sum mm' \left\{[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2\,\overline{[a, a']}\,(hh' + ll')\right\},$$

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2}\sum mm' \left\{[a, a']\left(\overline{p-p'}^{\,2} + \overline{q-q'}^{\,2}\right)\right\},$$

(*Mécanique analytique*, tome II, et *Mécanique céleste*, tome V, p. 332).

Le signe sommatoire $\sum$ s'étend, dans ces formules, à toutes les planètes m, m', m'', etc., prises deux à deux; les symboles $[a, a']$, $\overline{[a, a']}$ sont des fonctions des demi-axes a et a', etc., auxquelles on a donné diverses expressions. La plus usuelle est celle dont Laplace fait usage : pour la former on développe la fonction $\sqrt{a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2}$ en une série procédant selon les cosinus des multiples de φ, savoir :

$$(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^{\frac{1}{2}} = (a, a') + (a, a')_1 \cos\varphi + (a, a')_2 \cos 2\varphi + \text{etc};$$

à l'aide des deux premiers coefficients (a, a'), $(a, a')_1$ de cette série, on obtient les valeurs suivantes des deux symboles

$$[a, a'] = -\frac{3}{4}\,\frac{aa'}{(a'^2 - a^2)^2}\,(a, a')_1,$$

$$\overline{[a, a']} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{(a'^2 - a^2)^2}\left\{(a, a')_1\,\{a^2 + a'^2\} + aa'.(a, a')\right\}.$$

J'ai reconnu que l'expression de ce dernier symbole pouvait être simplifiée par la relation qui existe entre trois coefficients consécutifs $(a, a')_i$, $(a, a')_{i+1}$, $(a, a')_{i+2}$, de la série précédente; il résulte de cette relation que

$$\overline{[a, a']} = -\frac{15}{4}\,\frac{aa'}{(a'^2 - a^2)^2}\,(a, a')_2.$$

les deux symboles dont il s'agit peuvent être fournis encore plus simplement par le développement de la puissance $-\frac{3}{2}$ du même trinome $a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2$. Lagrange a trouvé, en effet, qu'en posant

$$(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = (\overline{a,a'}) + (\overline{a,a'})_1 \cos\varphi + (\overline{a,a'})_2 \cos 2\varphi + \text{ etc.},$$

on a aussi

$$[a,\, a'] = \frac{aa'}{4}(\overline{a,\, a'})_1 \quad \text{et} \quad [\overline{a,\, a'}] = \frac{aa'}{4}(\overline{a,\, a'})_2$$

(*Mécanique analytique*, tome II, page 141). En rapprochant ces valeurs des précédentes, il en résulterait les relations

$$\begin{aligned}(\overline{a,\, a'})_1 &= -\frac{3}{(a'^2 - a^2)^2}(a,\, a')_1,\\ (\overline{a,\, a'})_2 &= -\frac{15}{(a'^2 - a^2)^2}(a,\, a')_2;\end{aligned}$$

elles peuvent être rattachées à un beau théorème d'Euler, sur une espèce particulière d'intégrales définies. A la suite de cet écrit on en trouvera l'énoncé et une démonstration nouvelle.

Les coefficients $[a',\, a'']$, $[\overline{a',a''}]$, etc., se déduisent des précédents par de simples changements d'accents; on doit y regarder a, a', etc., comme des quantités constantes, parce qu'il a été prouvé que les grands axes des orbites n'admettent aucune équation séculaire dans les deux premiers ordres d'approximation. Cela posé, on aura les équations différentielles suivantes, pour déterminer h, l, h', l', etc.,

$$\left.\begin{aligned} m\sqrt{a}\,\frac{dh}{dt} &= \frac{dH}{dl}, & m'\sqrt{a'}\,\frac{dh'}{dt} &= \frac{dH}{dl'}, \quad \text{etc.},\\ -\,m\sqrt{a}\,\frac{dl}{dt} &= \frac{dH}{dh}, & -m'\sqrt{a'}\,\frac{dl'}{dt} &= \frac{dH}{dh'}, \quad \text{etc.};\end{aligned}\right\}\ (a)$$

on aura semblablement, pour déterminer p, q, p', q', etc., les équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} -\,m\sqrt{a}\,\frac{dp}{dt} &= \frac{dP}{dq}, & -\,m'\sqrt{a'}\,\frac{dp'}{dt} &= \frac{dP}{dq'}, \quad \text{etc.},\\ m\sqrt{a}\,\frac{dq}{dt} &= \frac{dP}{dp}, & m'\sqrt{a'}\,\frac{dq'}{dt} &= \frac{dP}{dp'}, \quad \text{etc.}\end{aligned}\right\}\ (b)$$

Puisque H est une fonction homogène de deux dimensions en h, l, h', etc., le premier groupe d'équations sera de forme linéaire et à coefficients constants; il en sera ainsi du second groupe. Ces équations seront donc facilement intégrables, et c'est ce qui a été complétement exécuté. Mais ces équations admettent plusieurs intégrales générales qu'il convient de remarquer.

2. En effet, des équations (a), prises deux à deux, on tire

$$\frac{d\mathrm{H}}{dh}\,dh + \frac{d\mathrm{H}}{dl}\,dl = 0, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{dh'}\,dh' + \frac{d\mathrm{H}}{dl'}\,dl' = 0, \quad \text{etc.}$$

En ajoutant toutes ces relations, on aura

$$\frac{d\mathrm{H}}{dh}\,dh + \frac{d\mathrm{H}}{dl}\,dl + \frac{d\mathrm{H}}{dh'}\,dh' + \frac{d\mathrm{H}}{dl'}\,dl' + \text{etc.} = 0.$$

Mais H étant une fonction des seuls éléments variables h, l, h', l', etc., l'équation précédente revient à $d\mathrm{H} = 0$, d'où l'on tire $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1$, H_1 étant une constante arbitraire ou une valeur particulière de H. On aura ainsi, entre les éléments variables h, l, h', l', etc., l'équation

$$\sum mm'\{[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2\,\overline{[a, a']}\,(hh' + ll')\} = 2\mathrm{H}_1;$$

ou bien encore

$$\sum mm'\{[a, a'](e^2 + e'^2) - 2\,\overline{[a, a']}\,ee' \cos(\varpi' - \varpi)\} = 2\mathrm{H}_1.$$

A l'aide du groupe d'équations différentielles (b), en p, p', etc., q, q', etc., on obtiendra pareillement l'égalité $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1$, où P_1 est aussi une constante arbitraire; c'est-à-dire

$$\sum mm'[a, a']\{(p - p')^2 + (q - q')^2\} = 2\mathrm{P}_1 = \text{constante}.$$

Lorsque p, p', q, q' sont de petites quantités, comme nous le supposons, la fonction $\sqrt{(p - p')^2 + (q - q')^2}$ exprime l'inclinaison mutuelle I' des orbites de m et de m'; en dénotant encore par I'' l'inclinaison des orbites de m et de m''; par $'\mathrm{I}''$ l'inclinaison de l'orbite de m' et de l'orbite de m'', etc., l'équation devient

$$\sum mm'[a, a'].\mathrm{I}'^2 = 2\mathrm{P}_1 :$$

on prouvera ci-dessous que H_1 est une constante positive : cela est évident pour P_1. Cette observation, que Lagrange n'a pas faite, nous semble propre à mieux préciser le sens et le caractère de ces relations : elle va bientôt nous être utile.

3. La fonction H est homogène et de seconde dimension, relativement aux variables h, h', etc., l, l', etc. La propriété de ces sortes de fonctions donne donc

$$2\mathrm{H} = h\frac{d\mathrm{H}}{dh} + h'\frac{d\mathrm{H}}{dh'} + \text{etc.} + l\frac{d\mathrm{H}}{dl} + l'\frac{d\mathrm{H}}{dl'} + \text{etc.} = 2\mathrm{H}_1\,;$$

mais on tire immédiatement des équations (a), respectivement multipliées par l, l', l'', etc., h, h', h'', etc.,

$$m\sqrt{a}\,\frac{ldh - hdl}{dt} + m'\sqrt{a'}\,\frac{l'dh' - h'dl'}{dt} + \text{etc.} =$$
$$= h\frac{d\mathrm{H}}{dh} + l\frac{d\mathrm{H}}{dl} + h'\frac{d\mathrm{H}}{dh'} + l'\frac{d\mathrm{H}}{dl'} + \text{etc.} = 2\mathrm{H}_1.$$

Or tang $\varpi = \frac{h}{l}$; conséquemment $d\varpi = \frac{ldh - hdl}{l^2 + h^2}$; on a $h^2 + l^2 = e^2$; ainsi $ldh - hdl = e^2 d\varpi$. L'équation que nous formons devient donc

$$m\sqrt{a}\,e^2\frac{d\varpi}{dt} + m'\sqrt{a'}\,e'^2\frac{d\varpi'}{dt} + \text{etc.} = 2\mathrm{H}_1, \quad (c)$$

formule donnée par Lagrange (*Mécan. analyt.*, tome II, p. 148).

On tire du second groupe (b) des équations en dp, dq, dp', dq', etc.,

$$m\sqrt{a}\,\frac{q\,dp - pdq}{dt} + m'\sqrt{a'}\,\frac{q'\,dp' - p'\,dq'}{dt} + \text{etc.} =$$
$$-\left(q\frac{d\mathrm{P}}{dq} + p\frac{d\mathrm{P}}{dp} + q'\frac{d\mathrm{P}}{dq'} + p'\frac{d\mathrm{P}}{dp'} + \text{etc.}\right);$$

P est homogène et de deux dimensions en p, q, p', q', p'', etc.; et par suite

$$2P = p\frac{dP}{dp} + q\frac{dP}{dq} + p'\frac{dP}{dp'} + q'\frac{dP}{dq'} + \text{etc.} = 2P_1;$$

on a d'ailleurs $\tang\theta = \frac{p}{q}$, et $p^2 + q^2 = \gamma^2$; il en résulte

$$d\theta = \frac{q\,dp - p\,dq}{p^2 + q^2} = \frac{q\,dp - p\,dq}{\gamma^2};$$

partant $q\,dp - p\,dq = \gamma^2\,d\theta$; en transformant de la même manière tous les termes de l'équation, elle devient

$$m\sqrt{a}\,\gamma^2\frac{d\theta}{dt} + m'\sqrt{a'}\,\gamma'^2\frac{d\theta'}{dt} + \text{etc.} = -2P_1. \qquad (d)$$

Cette relation entre les vitesses $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$, etc., des nœuds des orbites, analogue à celle qui existe entre $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, etc., n'a pas été remarquée par Lagrange; elle a été formée par M. de Pontécoulant (1^{er} volume de sa *Théorie analytique du Système du Monde*, page 371).

Avec les équations en dh, dh', etc., dl, dl', etc., on formera la combinaison suivante :

$$\frac{h\,dh + l\,dl}{dt}m\sqrt{a} + \frac{h'dh' + l'dl'}{dt}m'\sqrt{a'} + \text{etc.}$$
$$= h\frac{dH}{dl} - l\frac{dH}{dh} + h'\frac{dH}{dl'} - l'\frac{dH}{dh'} + \text{etc.}$$

On voit facilement par la composition algébrique de

$$2H = \sum mm'[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2\sum mm'\overline{[a, a']}(hh' + ll'),$$

que le second membre de l'équation que nous venons d'écrire est nul; l'équation, devenue intégrable, donne donc

$$K_1 = (h^2 + l^2)m\sqrt{a} + (h'^2 + l'^2)m'\sqrt{a'} + (h''^2 + l''^2)m''\sqrt{a''} + \text{etc.},$$

K_1 étant une constante arbitraire.

Cette équation, plus simplement écrite, revient à

$$K_1 = e^2 m \sqrt{a} + e'^2 m' \sqrt{a'} + e''^2 m'' \sqrt{a''} + \text{etc.};$$

des équations en dp, dq, dp', dq', etc., on déduit semblablement cette autre relation due, ainsi que la précédente, à Laplace,

$$L_1 = \gamma^2 m \sqrt{a} + \gamma'^2 m' \sqrt{a'} + \text{etc.}$$

4. Remarquons que la fonction $2H$ est composée de termes de la forme

$$mm' \{[a, a'](h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2) - 2\overline{[a, a']}(hh' + ll')\};$$

et établissons que chacune de ces quantités est positive. Pour s'en assurer, on observe que, d'après l'origine indiquée ci-dessus des symboles $[a, a']$, et $\overline{[a, a']}$, ces deux quantités sont positives; et l'on peut prouver que le rapport $\frac{\overline{[a, a']}}{[a, a']} = \rho$ est une quantité inférieure à l'unité. Cette propriété importante a été reconnue par Poisson. Nous en donnerons ci-dessous une démonstration différente de la sienne : mais, afin de ne pas interrompre notre sujet, nous admettrons ici que $\rho < 1$.

Or $$\begin{aligned}[a, a'](h^2 + h'^2) - 2\overline{[a, a']}hh' &= [a, a'](h^2 + h'^2 - 2\rho hh')\\ &= [a, a'][(h - \rho h')^2 + h'^2(1 - \rho^2)],\end{aligned}$$

quantité positive, puisque $1 - \rho^2 > 0$. Il en est ainsi de la partie

$$[a, a'](l^2 + l'^2) - 2\overline{[a, a']}ll',$$

et par conséquent le terme de H que nous considérons est positif. Puisque H ne renferme que des termes de cette forme, multipliés par des produits positifs mm', $m'm''$, etc., la valeur de H est *positive;* partant la constante H_1 a aussi le même signe.

La fonction P, composée de termes

$$mm'[a, a'][(p - p')^2 + (q - q')^2],$$

est positive; car chaque coefficient $[a, a']$ est positif, ainsi que nous l'avons déjà dit. Il s'ensuit que la seconde constante P_1 est positive.

5. Au moyen des équations (c) et (e), on peut former le rapport

$$\frac{m\sqrt{a}\,e^2\,\frac{d\varpi}{dt}+m'\sqrt{a'}\,e'^2\,\frac{d\varpi'}{dt}+\text{etc.}}{m\sqrt{a}\,e^2+m'\sqrt{a'}\,e'^2+\text{etc.}}=\frac{2H_1}{K_1};$$

et, selon ce qui vient d'être prouvé, le second membre est ici une constante positive. Mais le premier a une valeur nécessairement renfermée entre la plus grande des vitesses angulaires $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, etc., et la moindre de ces vitesses, parce que les coefficients $m\sqrt{a}\,e^2$, $m'\sqrt{a'}\,e'^2$, etc., quoique variables, sont constamment positifs : c'est à toute époque une sorte de moyenne entre les vitesses diverses des périhélies; cette moyenne, d'après l'équation, est donc une grandeur constante et *positive*. Il s'ensuit, dans la formation de cette moyenne, que l'effet des vitesses directes l'emporte sur celui des vitesses séculaires rétrogrades, et que dans aucun temps, toutes les vitesses des périhélies ne pourront être rétrogrades : sur quoi il convient de se rappeler que nous n'entendons parler que de la partie séculaire de ces vitesses, et abstraction faite de la partie périodique, selon l'usage des géomètres en cette matière.

6. A l'aide des équations (d), (f), on formera aussi le rapport

$$\frac{\frac{d\theta}{dt}\gamma^2 m\sqrt{a}+\frac{d\theta'}{dt}\gamma'^2 m'\sqrt{a'}+\text{etc.}}{\gamma^2 m\sqrt{a}+\gamma'^2 m'\sqrt{a'}+\text{etc.}}=-\frac{2P_1}{L_1};$$

le second membre est ici une quantité négative; le premier est une moyenne obtenue en multipliant chacune des vitesses $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$, $\frac{d\theta''}{dt}$, etc., des nœuds des orbites, par un coefficient positif variable

$$\gamma^2 m\sqrt{a},\quad \gamma'^2 m'\sqrt{a'},\quad \gamma''^2 m''\sqrt{a''},\quad \text{etc.},$$

et en divisant la somme des produits par la somme des coefficients des vitesses : puisque cette moyenne est une quantité négative, on peut en conclure qu'à aucune époque toutes les vitesses séculaires $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$, etc., des nœuds des orbites ne peuvent être directes.

On voit que ce résultat est la conséquence immédiate du signe reconnu de la constante P_1, comme celui qui concerne les vitesses $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, etc., est la conséquence du signe de la constante H_1. La considération des moyennes ne sert ici qu'à fournir un énoncé simple de ces propositions, savoir : qu'entre les vitesses des périhélies on peut toujours former une moyenne constante et *positive*, et entre les vitesses des nœuds des orbites on peut obtenir à toute époque une moyenne constante et *négative*.

L'équation $\sum mm'[a, a']\,\mathrm{I}'^2 = 2P_1$ fournit une relation entre les carrés des inclinaisons mutuelles des orbites considérées deux à deux; il existe une relation différente entre les mêmes quantités que nous allons faire connaître.

7. Dans cette vue, nous reprendrons l'équation du principe des aires relative au mouvement des planètes m, m', etc., sous la forme que Laplace lui donne (*Mécanique céleste*, 1er volume, page 315),

$$\begin{aligned} c = m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\gamma + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\gamma' + \text{etc.} \\ + \sum mm'\frac{(x'-x)(dy'-dy)-(y'-y)(dx'-dx)}{dt}. \end{aligned}$$

γ, γ', etc. sont ici les inclinaisons des orbites au plan des x, y, qui peuvent avoir des valeurs quelconques; c est une quantité constante.

La partie comprise dans le signe $\sum$ contient des termes semblables à ceux qui forment la première ligne, et auxquels on pourra les réunir; mais ils seront d'un ordre inférieur, à cause des produits mm', etc. Les autres termes de $\sum$ seront périodiques, ou d'un ordre encore inférieur à celui de mm', et pour cette raison nous les négligerons. L'équation ainsi réduite devient

$$c = m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\gamma + m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos\gamma' + \text{etc.}:$$

or

$$m\sqrt{a(1-e^2)} = \frac{ma^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^3}};$$

et en désignant le moyen mouvement de la planète m par n, on a

$$n = \sqrt{\frac{\mathrm{M}+m}{a^3}};$$

par suite

$$m\sqrt{a(1-e^2)} = \frac{mn.a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mathrm{M}+m}},$$

et au degré d'approximation où nous nous bornons, l'on peut écrire simplement

$$m\sqrt{a(1-e^2)} = mn.a^2\sqrt{\frac{1-e^2}{\mathrm{M}}}.$$

Soit E la surface de l'ellipse décrite par la planète m; on a

$$\mathrm{E} = \pi.a^2\sqrt{1-e^2};$$

l'équation des aires pourra donc être réduite à cette forme

$$\pi c\sqrt{\mathrm{M}} = mn\mathrm{E}\cos\gamma + m'n'\mathrm{E}'\cos\gamma' + m''n''\mathrm{E}''\cos\gamma'' + \text{etc.}:$$

prenant la masse **M** du Soleil pour unité des masses, le premier membre sera simplement $\pi.c$. Cette équation est relative à la projection des aires sur l'un des plans des coordonnées. En désignant par β et par α les angles que l'orbite de m forme avec les deux autres plans des coordonnées; par α', β', les angles analogues relatifs à l'orbite de m', etc., on aura deux équations semblables à la précédente, savoir :

$$c_{,}\pi = mn\mathrm{E}\cos\beta + m'n'\mathrm{E}'\cos\beta' + \text{etc.},$$
$$c_{,,}\pi = mn\mathrm{E}\cos\alpha + m'n'\mathrm{E}'\cos\alpha' + \text{etc.}$$

Désignons, comme dans l'article **2**, par I' l'inclinaison de l'orbite de m sur l'orbite de m'; par 'I'' l'inclinaison de l'orbite m'' sur l'orbite de m', et ainsi des autres; on sait que

$$\cos \mathrm{I}' = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$
$$\cos {}'\mathrm{I}'' = \cos\alpha'\cos\alpha'' + \text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$

on a de plus, entre les angles α, β, γ, relatifs à une même orbite, l'équation

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma;$$

Si, en ayant égard à ces relations, l'on compose la somme des carrés de $c\pi$, $c_{,}\pi$, $c_{,,}\pi$, données dans les formules précédentes, on aura

$$(c^2 + c_{,}^2 + c_{,,}^2)\pi^2 = m^2 n^2 \mathrm{E}^2 + m'^2 n'^2 \mathrm{E}'^2 + \text{etc.} \\ + 2\sum mm'nn'\mathrm{EE}' \cos(\mathrm{I}');$$

mais

$$\cos \mathrm{I}' = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\mathrm{I}'}{2}\right), \quad \cos \mathrm{I}'' = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\mathrm{I}''}{2}\right), \quad \text{etc.}$$

D'après cela, l'équation pourra être ainsi écrite :

$$(mn\mathrm{E} + m'n'\mathrm{E}' + m''n''\mathrm{E}'' + \text{etc.})^2 \\ - 4\sum mm'nn'\mathrm{EE}' \sin^2\left(\frac{\mathrm{I}'}{2}\right) = (c^2 + c_{,}^2 + c_{,,}^2)\pi^2.$$

En négligeant les puissances de e, e', etc., supérieures à la seconde dimension, la somme

$$mn\mathrm{E} + m'n'\mathrm{E}' + \text{etc.} = \pi m\sqrt{a(1-e^2)} + \pi m'\sqrt{a'(1-e'^2)} + \text{etc.},$$

est constante. En effet, par le développement de chaque radical, tel que $\sqrt{1-e^2}$, cette somme égale

$$m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + \text{etc.} - \left(\frac{m\sqrt{a}e^2}{2} + \frac{m'\sqrt{a'}e'^2}{2} + \text{etc.}\right),$$

mais nous avons vu que la somme

$$m\sqrt{a}\,e^2 + m'\sqrt{a'}\,e'^2 + \text{etc.} = \mathrm{K}_{,} = \text{constante},$$

et la somme $m\sqrt{a} + m'\sqrt{a'} + \text{etc.}$ est aussi une quantité constante, puisque l'on fait abstraction des termes périodiques de a, a', etc. Il s'ensuit que l'équation précédente donne

$$4\sum mm'nn'\mathrm{EE}'\sin^2\left(\frac{\mathrm{I}'}{2}\right) = \text{constante}.$$

Dans le premier de ses termes le facteur

$$4nn'\mathrm{EE}'\sin^2\frac{\mathrm{I}'}{2} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{a^3a'^3}}a^2a'^2\sqrt{(1-e^2)(1-e'^2)}\left(\frac{\mathrm{I}'^2}{4} - \frac{\mathrm{I}'^4}{48} + \text{etc.}\right);$$

cette quantité doit être réduite à $\pi^2\sqrt{aa'}.\mathrm{I}'^2$ quand on néglige les termes de quatre dimensions en e, e', I'; tous les termes renfermés dans le $\sum$ ayant la même forme, l'équation, divisée par π^2, se réduit à

$$\sum mm'\sqrt{aa'}.\mathrm{I}'^2 = \text{constante},$$

qui doit être considérée comme une intégrale des équations (b). Dans le premier membre de cette égalité, on voit la somme des carrés des inclinaisons mutuelles des orbites des planètes prises deux à deux, multipliées par les produits des masses et des racines carrées des distances moyennes correspondantes; et le théorème exprime que cette somme est une grandeur invariable. L'équation de Lagrange,

$$\sum mm'[a, a']\mathrm{I}'^2 = 2\mathrm{P}_1,$$

établit déjà une relation entre les mêmes carrés. Ces relations s'accordent entre elles pour établir que l'inclinaison I' est invariable quand il n'y a que deux orbites.

Si l'on considère trois orbites, on a immédiatement, par ces deux équations distinctes, deux des inclinaisons exprimées au moyen de la troisième, qui reste seule à déterminer en fonction du temps t. C'est ce que l'on peut faire de différentes manières, et il n'est pas difficile de reconnaître que celle que Lagrange a employée dans la *Mécanique analytique* (deuxième volume), revient à prendre pour inconnue la surface du triangle sphérique formé par les pôles des trois orbites, de manière que chaque côté de ce triangle représente l'inclinaison de deux des orbites. La même variable entre aussi dans les formules élégantes données, sur ce problème, par M. Liouville (*Journal des Mathématiques,* tome IV).

Note sur des relations employées dans le Mémoire précédent, et indiquées aux articles **2** *et* **5**.

On sait que la puissance d'un trinome

$$a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2$$

peut être développée en une série procédant selon des cosinus multiples de φ, savoir :

$$(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}A_s^{(0)} + A_s^{(1)}\cos\varphi + \ldots + A_s^{(i)}\cos(i\varphi) + \text{etc.};$$

les méthodes à suivre pour cet objet sont rapportées, depuis Euler, dans plusieurs Traités, et particulièrement dans la *Mécanique* de Laplace (tome I, page 267), etc. On voit aisément que les coefficients $A_s^{(i)}$ sont des grandeurs positives quand s est positif, c'est-à-dire quand on développe une puissance négative $-s$ du trinome. Lorsque l'on suppose $s = \frac{3}{2}$, les coefficients $\frac{1}{2}A_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, $A_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, $A_{\frac{3}{2}}^{(2)}$, se changent dans les symboles que nous avons désignés ci-dessus, article **2**, par

$$(\overline{a, a'}), \qquad (\overline{a, a'})_1, \qquad (\overline{a, a'})_2.$$

Si l'on prend $s = -\frac{1}{2}$, les coefficients $\frac{1}{2}A_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$, $A_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, $A_{-\frac{1}{2}}^{(2)}$, deviennent les symboles que nous avons dénotés par

$$(a, a'), \qquad (a, a')_1, \qquad (a, a')_2.$$

On obtient d'ailleurs le coefficient général $A_s^{(i)}$ par une intégrale définie au moyen du procédé de d'Alembert; pour cela on multiplie les deux membres de l'équation précédente par $\cos(i\varphi)$, et l'on intègre de $\varphi = 0$ à $\varphi = \pi$; il en résulte

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(i\varphi)\, d\varphi}{(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^s} = A_s^{(i)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

M. Jacobi a donné à cette intégrale une forme remarquable, et de mon côté je l'ai traitée par une méthode qui a conduit à une expression différente (voyez le tome XV du *Journal de Mathématiques* de M. Crelle et le *Journal de l'Ecole Polytechnique*, tome XVI).

En supposant $a' > a$, on posera $a = a'\alpha$, et l'on aura

$$(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^{-s} = a'^{-2s}(\alpha^2 - 2\alpha \cos\varphi + 1)^{-s};$$

et si vous développez cette dernière fonction selon des cosinus, savoir,

$$(1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos\varphi + \ldots + b_s^{(i)} \cos i\varphi \ldots,$$

vous aurez
$$A_s^i = a'^{-2s} . b_s^i.$$

Cette fonction génératrice des coefficients $b_s^{(i)}$, donnera aussi

$$b_s^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi \cos(i\varphi)}{(1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2)^s}.$$

De cette valeur, ou encore de la considération directe de la série $\frac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos\varphi +$ etc., provenant de la fonction génératrice $(1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2)^{-s}$, on déduit entre trois coefficients consécutifs $b_s^{(i+1)}$, $b_s^{(i)}$, $b_s^{(i-1)}$, l'équation suivante, aux différences finies (*Mécanique céleste*, tome I, page 268),

$$(i + 1 - s)\, b_s^{(i+1)} - \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} . i . b_s^{(i)} + (i - 1 + s)\, b_s^{(i-1)} = 0. \quad (s)$$

Le développement analogue de $(1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2)^{s-1}$, qui ne diffère de la première fonction génératrice qu'en ce que $1 - s$ y remplace s, donnera naissance à des coefficients $b_{1-s}^{(i)}$, entre lesquels on aura pareillement une équation aux différences; elle se déduit de la précédente en remplaçant s par $1 - s$, savoir :

$$(i + s)\, b_{1-s}^{(i+1)} - \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} . i . b_{1-s}^{(i)} + (i - s)\, b_{1-s}^{(i-1)} = 0. \quad (s')$$

Posons

$$b_s^{(i)} = \frac{s(1+s)(2+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)(3-s)\ldots(i-s)} . \mathfrak{C}^{(i)}:$$

$\mathfrak{C}^{(i)}$ sera une fonction de α et de i, qui satisfera à une équation aux différences finies que nous allons former; ce sera, pour nous, une série déterminée procédant, comme $b_s^{(i)}$ et $b_{1-s}^{(i)}$, selon les puissances α^i, α^{i+2}, etc., et de forme entièrement connue; lorsque $i=0$, on devra avoir simplement $b_s^{(0)} = \mathfrak{C}^{(0)}$. En mettant $i+1$ et $i-1$ dans la valeur supposée de $b_s^{(i)}$, on aura

$$b_s^{(i+1)} = \frac{s.1+s.2+s....i-1+s}{1-s.2-s.3-s....i-s} \cdot \frac{i+s}{i+1-s} \cdot \mathfrak{C}^{(i+1)},$$

$$b_s^{(i-1)} = \frac{s.1+s.2+s....i-1+s}{1-s.2-s.3-s....i-s} \cdot \frac{i-s}{i-1+s} \cdot \mathfrak{C}^{(i-1)};$$

ces valeurs de $b_s^{(i+1)}$, $b_s^{(i)}$, $b_s^{(i-1)}$ en $\mathfrak{C}^{(i+1)}$, $\mathfrak{C}^{(i)}$, $\mathfrak{C}^{(i-1)}$, substituées dans l'équation (s) donnent la suivante, après avoir écarté le facteur commun $\frac{s.1+s.2+s...i-1+s}{1-s.2-s.3-s...i-s}$:

$$\frac{i+s}{i+1-s}.(i+1-s)\,\mathfrak{C}^{(i+1)} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha}.i.\mathfrak{C}^{(i)} + \frac{i-s}{i-1+s}.(i-1+s).\mathfrak{C}^{(i-1)} = 0,$$

ou bien

$$(i+s)\,\mathfrak{C}^{(i+1)} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha}.i.\mathfrak{C}^{(i)} + (i-s).\mathfrak{C}^{(i-1)} = 0.$$

La forme de cette équation linéaire est identique à celle de l'équation (s') en $b_{1-s}^{(i)}$; d'ailleurs les quantités $b_{1-s}^{(i)}$ et $\mathfrak{C}^{(i)}$ sont des séries déterminées et procédant l'une et l'autre selon les puissances α^i, α^{i+2}, α^{i+4}, etc.; il est facile de voir, d'après cela, que l'on doit avoir $\mathfrak{C}^{(i)} = b_{1-s}^{(i)}.\mathrm{S}$, en dénotant par S un coefficient indépendant de i, et conséquemment

$$b_s^{(i)} = \frac{s.(1+s)(2+s)...(i-1+s)}{(1-s)(2-s)(3-s)...(i-s)} \cdot b_{1-s}^{(i)}.\mathrm{S}.$$

La valeur de S sera fournie par l'hypothèse de $i=0$; il en résultera $b_s^{(0)} = b_{1-s}^{(0)}.\mathrm{S}$; ainsi cette constante S sera le rapport de $b_s^{(0)}$ à $b_{1-s}^{(0)}$.

Pour déterminer ce rapport nous aurons recours à l'expression

$$b_s^{(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^s};$$

qui résulte de celle que nous avons donnée ci-dessus $b_s^{(i)}$; sous le signe $\int$ de l'intégration définie nous changerons la variable φ en une autre φ' qui sera liée à la première par la relation

$$(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)(1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2) = (1 - \alpha^2)^2,$$

qui résulte d'une propriété de l'ellipse; elle montre qu'aux valeurs $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, répondent $\varphi' = 0$, $\varphi' = \pi$.

On en tire

$$\cos\varphi' = \frac{(1+\alpha^2)\cos\varphi - 2\alpha}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2},$$

et par suite

$$\sin\varphi' = \frac{(1-\alpha^2)\sin\varphi}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2}.$$

Mais en différentiant le logarithme de la relation de $\cos\varphi$ et de $\cos\varphi'$, on a

$$\frac{d\varphi\sin\varphi}{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2} = \frac{d\varphi'.\sin\varphi'}{1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2}.$$

Cette équation, multipliée par celle qui la précède, donnera sur-le-champ

$$d\varphi = \frac{(1-\alpha^2)\,d\varphi'}{1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2},$$

on multipliera encore celle-ci par l'équation

$$\frac{(1-\alpha^2)^{2s}}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^s} = (1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2)^s;$$

cela donne

$$\int_0^\pi \frac{(1-\alpha^2)^{2s}\,d\varphi}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^s} = \int_0^\pi (1-\alpha^2)\,d\varphi'\,(1 + 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2)^{s-1}.$$

Puisque

$$(1 - 2\alpha\cos\varphi' + \alpha^2)^{-(1-s)} = \tfrac{1}{2}b_{1-s}^{(0)} + b_{1-s}^{(1)}\cos\varphi' + \text{etc.},$$

on aura, en remplaçant φ' par $\pi - \varphi'$,

$$(1 + 2\alpha \cos\varphi' + \alpha^2)^{s-1} = \tfrac{1}{2} b^{(0)}_{1-s} - b^{(1)}_{1-s} \cos\varphi' + \text{etc.},$$

et en multipliant par $d\varphi'$ et intégrant de $\varphi' = 0$, à $\varphi' = \pi$, on aura

$$\int_0^{\pi} d\varphi' (1 + 2\alpha \cos\varphi' + \alpha^2)^{s-1} = \frac{\pi}{2} b^{(0)}_{1-s}.$$

L'équation que nous venons de former, et qui renferme les deux intégrales définies, devient donc

$$\frac{\pi}{2}(1 - \alpha^2)^{2s} b^{(0)}_s = \frac{\pi}{2}(1 - \alpha^2)\, b^{(0)}_{1-s};$$

et l'on aura

$$\frac{b^{(0)}_s}{b^{(0)}_{1-s}} = \mathrm{S} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{2s-1}}.$$

Substituant cette valeur de la constante S dans la relation de $b^{(i)}_s$ à $b^{(i)}_{1-s}$, on aura

$$b^{(i)}_s = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{2s-1}} \frac{s(1+s)(2+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)(3-s)\ldots(i-s)} b^{(i)}_{1-s},$$

où l'on peut remettre à la place de $b^{(i)}_s$ et $b^{(i)}_{1-s}$ leurs formes en intégrales définies, savoir,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(i\varphi)\,d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^s} = \frac{1}{(1-\alpha^2)^{2s-1}} \frac{s.(1+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)\ldots(i-s)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(i\varphi).d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{1-s}};$$

c'est le théorème d'Euler auquel nous avons fait allusion, art. **2**, et dont une démonstration ingénieuse a été donnée par M. Jacobi (*Journal de M. Crelle*, tome XV). On posera dans l'équation $s = \frac{3}{2}$, d'où $1 - s = -\frac{1}{2}$, et $\alpha = \frac{a}{a'}$: en observant qu'alors le facteur

$$\frac{s(1+s)(2+s)\ldots(i-1+s)}{(1-s)(2-s)(3-s)\ldots(i-s)} = \frac{3.5.7\ldots(2i-1)(2i+1)}{-1.1.3.5\ldots(2i-3)} = -(2i-1)(2i+1),$$

on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(i\varphi)\,d\varphi}{(a'^2-2a'a\cos\varphi+a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(4i^2-1)}{2\pi(a'^2-a^2)^2} \int_0^{\pi} \cos(i\varphi)d\varphi(a'^2-2aa'\cos\varphi+a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais le premier membre représente le symbole $(\overline{a, a'})_i$, et l'intégrale définie du second est aussi le symbole $(a, a')_i$ de l'article **2**; on a donc entre ces quantités l'équation

$$(\overline{a, a'})_i = -\frac{4i^2 - 1}{(a'^2 - a^2)^2}(a, a')_i.$$

En donnant à i les valeurs $i = 1$, $i = 2$, on retrouve les rapports que nous avions remarqués art. **2**.

Le développement de $(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^{-s-1}$ selon les cosinus des multiples de φ, aura pour terme général $A_{s+1}^{(i)}\cos(i\varphi)$. Il existe des relations utiles entre les coefficients $A_s^{(i)}$ et $A_{s+1}^{(i)}$, que l'on déduit immédiatement de celles que Laplace a rapportées dans le 1^er^ volume de sa *Mécanique céleste*, page 268. Ces formules ont la propriété de conduire à des résultats exacts, et que l'on peut former par des éliminations, quand on y écrit $-i$ à la place de i, pourvu que $A_s^{(-i)}$ soit remplacé par $A_s^{(i)}$. Si l'on exécute ce changement dans la première formule de la page 269 de Laplace, on en déduit

$$(i + s)A_s^{(i)} = s(a^2 + a'^2)A_{s+1}^{(i)} - 2s.aa'.A_{s+1}^{(i+1)}.$$

Ecrivons ici $-i-1$ à la place de i, et remplaçons toujours les A_s^{-i} par $A_s^{(i)}$, il vient

$$(i + 1 - s)A_s^{(i+1)} = 2saa'A_{s+1}^{(i)} - s(a^2 + a'^2)A_{s+1}^{(i+1)};$$

ajoutant et soustrayant ces formules, on a

$$(i + s)A_s^{(i)} + (i + 1 - s)A_s^{(i+1)} = s(a' + a)^2\left[A_{s+1}^{(i)} - A_{s+1}^{(i+1)}\right],$$
$$(i + s)A_s^{(i)} - (i + 1 - s)A_s^{(i+1)} = s(a' - a)^2\left[A_{s+1}^{(i)} + A_{s+1}^{(i+1)}\right].$$

Nous avons déjà rappelé que tous les coefficients $A_s^{(i)}$ sont positifs quand $s > 0$; si s est négatif et que $1 + s$ soit > 0, le coefficient A_s^{0} seul est positif, et les autres $A_s^{(1)}$, $A_s^{(2)}$, etc., sont négatifs.

Le terme $-sA_s^{(i+1)}$ de la première équation précédente, sera donc négatif quand s est > 0; mais dès que $i+1-s$ est positif, le premier membre de l'équation est nécessairement positif, et la différence $A_{s+1}^{(i)} - A_{s+1}^{(i+1)}$ le devient elle-même. Ainsi, par exemple, si $s = \frac{1}{2}$,

$i + 1 - s = i + \frac{1}{2}$, cette quantité étant positive pour toute valeur entière de i, il s'ensuit que les différences $A^{(0)}_{\frac{3}{2}} - A^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, $A^{(1)}_{\frac{3}{2}} - A^{(2)}_{\frac{3}{2}}$, etc., sont positives. Mais ces coefficients $A^{(0)}_{\frac{3}{2}}$, $A^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, etc., sont ceux du développement de

$$(a^2 - 2aa' \cos \varphi + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = (\overline{a, a'}) + (\overline{a, a'})_1 \cos \varphi + \text{etc.}:$$

on a donc $$(\overline{a, a'}) > (\overline{a, a'})_1 > (\overline{a, a'})_2, \text{ etc.}$$

Nous avons donné (art. **2**) une expression des symboles $[\overline{a, a'}]$, $[a, a]$, de laquelle résulte pour leur rapport ρ

$$\rho = \frac{[\overline{a, a'}]}{[a, a]} = \frac{(\overline{a, a'})_2}{(\overline{a, a'})_1};$$

d'après l'inégalité qui vient d'être établie, on voit que ρ est < 1, conformément à ce que nous avons supposé art. **5**. Par des moyens analogues appliqués aux autres expressions des deux mêmes symboles, on arriverait au même résultat.

La démonstration sur laquelle Poisson a établi que $\rho < 1$ exige la transformation des symboles en fonctions elliptiques, et de plus le développement de ces fonctions en séries procédant selon les puissances du rapport $\frac{a}{a'}$; elle nous paraît moins simple que celle que nous venons de donner (voyez les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1836, page 41).