JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Addition à la note sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 31-33.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__31_0>

ADDITION

A LA

NOTE SUR LE PRINCIPE FONDAMENTAL

DE LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR J. LIOUVILLE. [*]

L'ingénieuse démonstration de M. Mourey, que j'ai rapportée dans cette Note, repose essentiellement sur l'existence d'une courbe δ enveloppant le point A de toute part et sur laquelle l'équation

$$\rho\rho_1\ldots\rho_{m-1} = \mathrm{R} \tag{2}$$

est toujours vérifiée. Cette courbe peut se composer, sans inconvénient, de diverses parties comprenant à leurs points de jonction des angles finis; mais elle ne doit pas être interrompue : l'enceinte qu'elle forme autour du point A doit être exactement fermée. Or, cette propriété importante ne m'a pas paru établie par M. Mourey; cet estimable auteur prouve seulement que les divers rayons rectilignes émanés de l'origine A passent tous au moins par un point satisfaisant à l'équation (2). Mais j'ai trouvé depuis qu'on peut suppléer aisément aux détails que M. Mourey a omis, sans doute pour abréger. En effet, puisqu'on a

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ldots \rho_{m-1} = \sqrt{(x-a_{m-1})^2+(y-b_{m-1})^2},$$

les points du plan $y\mathrm{A}x$ dont les coordonnées satisfont à l'équation (2), qui est algébrique et de degré $2m$, ne peuvent être sur une même ligne droite en nombre plus grand que $2m$; par suite ils ne peuvent pas former une courbe du genre des spirales, qui tournerait indéfiniment sans

[*] *Voyez* tome IV de ce Journal, page 501.

rentrer sur elle-même et sans sortir d'un espace limité. On s'en convaincra en observant que l'équation d'une ligne droite est de la forme $y = \gamma x + \beta$ ou de la forme $x = \gamma$; dans le premier cas, l'équation $y = \gamma x + \beta$, combinée avec l'équation (2), ou plutôt avec l'équation $\rho^2 \rho_1^2 \ldots \rho_{m-1}^2 = R^2$, conduit à une équation du degré $2m$, en x seule, dont le premier terme, savoir $(1 + \gamma^2)^m x^{2m}$, ne se réduit pas à zéro; cette équation ne peut avoir plus de $2m$ racines réelles [*], et à chacune de ses racines x répond une seule valeur de y; dans le second cas, la valeur de x est unique, et les valeurs de y sont fournies par une équation de degré $2m$ dont le premier terme est y^{2m}, et qui ne peut avoir aussi que $2m$ racines au plus [**]. D'après cela on voit que si le point A n'est pas dans une enceinte fermée, on pourra, à partir de ce point, tracer une ligne courbe qui, passant à travers les issues restées libres, se prolonge sans interruption jusqu'à un point O aussi éloigné qu'on voudra de l'origine A, et sur laquelle l'équation (2) n'ait jamais lieu. Or, cela est absurde; car dans les environs du point A la différence $\rho\rho_1 \ldots \rho_{n-1} - R$ est négative, dans les environs du point O elle est positive; de plus, elle varie d'une manière continue lorsqu'on marche de A vers O sur la courbe AO; donc elle s'évanouit quelque part au moins pour un point de cette courbe AO. La belle démonstration de M. Mourey se trouve ainsi complétée. On pourrait du reste la présenter sous diverses formes en décomposant en deux parties de plusieurs manières le premier membre de l'équation (1).

Je profiterai de l'occasion pour corriger quelques fautes qui se sont glissées dans la partie de ma Note relative à M. Gauss. Ainsi, page 505, ligne 26, *au lieu de* par $z - \rho$, *lisez* $z \mp \rho$; page 506, ligne dernière, *au*

---

[*] Que toute équation de degré n ait au plus n racines différentes, c'est là une proposition très élémentaire dont la démonstration connue depuis long-temps n'offre aucune difficulté, et dont on a le droit de se servir, sans faire un cercle vicieux, pour prouver cet autre théorème beaucoup plus compliqué, qui nous occupe ici : Une équation algébrique quelconque a au moins une racine, et par suite une équation de degré n a précisément n racines, égales ou inégales.

[**] Je ferai remarquer en passant que la courbe représentée par l'équation (2) n'a pas de branches infinies, ni par conséquent d'asymptotes, puisque dès que l'une des deux coordonnées x, y surpasse une certaine limite de grandeur absolue, le produit $\rho\rho_1 \ldots \rho_{m-1}$ est nécessairement $> R$.

lieu de par $z - \rho$, si $\omega = 0$, *lisez* par $z - \rho \cos \omega$ quand $\sin \omega = 0$; *au lieu de* si ω diffère de o, *lisez* quand $\sin \omega$ diffère de zéro; page 508, lignes 17 et 18, *au lieu de* $\varphi = t$ et $\varphi = u$ sont deux intégrales de l'équation, *lisez*, t et u sont les dérivées par rapport à ω et θ d'une même fonction

$$\varphi = \frac{e^{m\theta} \sin m\omega}{m} + \frac{\mathrm{A}e^{(m-1)\theta} \sin (m-1)\omega}{m-1} + \ldots + \frac{\mathrm{L}e^{\theta} \sin \omega}{1} + \mathrm{M}\omega,$$

satisfaisant à l'équation.

J'ajouterai que le Mémoire de M. Gauss, dont j'ai donné l'analyse, se trouve dans le *Recueil de l'Académie de Gottingue* (3me série, tome III) : le même volume contient d'autres recherches de ce grand géomètre sur le même sujet; la méthode est différente et plus compliquée. Au reste, dès 1799, M. Gauss avait publié une dissertation intitulée : *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. En lisant cette dissertation si remarquable (où sont indiquées tant d'idées neuves, où sont appréciés avec tant de justesse les travaux antérieurs des géomètres, et en particulier de Lagrange), on se demande comment il est arrivé que Lagrange ne l'ait pas connue, ou du moins n'en ait pas fait mention, dans la seconde édition de son traité *sur la résolution des équations numériques*, publiée en 1808.