JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Résolution de l'équation du second degré à une inconnue par les fractions continues

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 281-310.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__281_0>

RÉSOLUTION
DE
L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE
PAR LES FRACTIONS CONTINUES;

PAR V.-A. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

La résolution complète de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$ par les fractions continues est due à Lagrange, qui l'a donnée dans son *Traité de la résolution des équations numériques*. Ensuite Legendre en a simplifié les calculs dans sa *Théorie des nombres;* mais pour établir certaines propriétés des fractions continues périodiques racines de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$ (à coefficients entiers), il s'est appuyé sur la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ en nombres entiers. C'est ce que j'ai évité avec soin, car la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ n'est réellement dans le cas principal, celui de $b^2 - ac$ positif non carré, qu'une conséquence assez simple de la résolution de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$ par les fractions continues.

Voici les points où je crois avoir simplifié la résolution de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$.

D'abord j'ai abrégé le calcul par un algorithme qui en enchaîne toutes les parties et le réduit pour ainsi dire à sa plus simple expression. J'ai donné ensuite une règle pour trouver sans calcul la deuxième racine quand la première a été calculée [*].

En général, la période de la deuxième est formée des mêmes quotients que celle de la première, mais en ordre renversé. Or il peut arriver que les périodes des deux racines soient identiques : c'est surtout dans la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$, qu'il est bon

[*] Cette règle, énoncée dans le Bulletin de M. Férussac, mars 1831, a été démontrée récemment par M. C. Ramus (*voyez* le Journal de M. Crelle, tome XX, page 25, 1839).

d'avoir égard à cette circonstance; j'ai donc examiné dans quels cas elle peut se présenter.

Si pour chaque racine on calcule les fractions convergentes qui finissent à des quotients périodiques occupant le même rang dans les périodes successives, on trouve que les numérateurs forment une série récurrente et qu'il en est de même des dénominateurs. Ce sont réellement ces fractions qui donnent la résolution de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ convenablement préparée; il fallait donc faire voir, indépendamment de cette résolution, comment, par un simple changement de signe correspondant à celui d'un radical carré, les convergentes pour la deuxième racine se déduisent de celle pour la première.

J'ai cru que dans un sujet aussi connu, la marche synthétique était sans inconvénient, et j'ai réduit à quatre propositions complexes ce que Lagrange et Legendre ont donné à ce sujet, en y joignant les développements que je viens d'exposer.

Pour la théorie générale des fractions continues, on peut consulter un Mémoire fort étendu de M. Stern (Journal de M. Crelle, t. X et XI), mais la théorie des fractions continues périodiques y est moins développée que dans le Mémoire de M. Ramus.

I.

Propositions préliminaires.

Avant de parler des fractions continues périodiques, il est bon de rappeler en peu de mots quelques théorèmes, et d'expliquer la notation employée dans les démonstrations suivantes. Cette notation locale est de nature à simplifier quelques recherches.

1. L'expression

$$x_1 = q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots\ q_k,\ x_{k+1}$$

représentera la fraction continue

$$x_1 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}} \qquad \cdots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{x_{k+1}}};$$

$q_1, q_2, \ldots q_k$ sont des quotients entiers dont les indices $1, 2, 3, \ldots k$ marquent le rang. La quantité x_{k+1} est un quotient complet, c'est-à-dire qui complète la valeur de x_1; quand x_1 est irrationnel, x_{k+1} l'est également.

L'expression

$$x_1 = q_1, \; q_2, \ldots q_k, \; (q_{k+1}, \; q_{k+2}, \ldots q_{k+n})$$

montre que les quotients $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_{k+n}$, compris entre parenthèses, reviennent périodiquement. C'est une fraction continue périodique dont la période a n termes.

2. Si l'on réduit la fraction continue

$$y = q_g, \; q_{g+1}, \ldots q_k$$

en fraction ordinaire, le numérateur sera représenté par

$$(g, \; k),$$

qui indique qu'on a pris tous les quotients depuis celui dont l'indice est g, jusqu'à celui dont l'indice est k. On voit, d'après cela, que le numérateur de y sera $(g+1, k)$; ainsi

$$y = q_g, \; q_{g+1}, \ldots q_k = \frac{(g, k)}{(g+1, k)}.$$

3. On a, en général,

$$(1, n) = (1, n-1) q_n + (1, n-2),$$
$$(2, n) = (2, n-1) q_n + (2, n-2).$$

Ces formules ayant été vérifiées jusqu'à l'indice n, on les étend à l'indice $n+1$ en changeant q_n en $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$ dans la fraction $\frac{(1, n)}{(2, n)}$.

Pour les appliquer à tous les cas, il faut se rappeler les conventions suivantes

$$(n, n) = q_n, \quad (n+1, n) = 1, \quad (n+2, n) = 0.$$

qui servent à donner plus de symétrie aux formules.

4. Si dans la fraction

$$\frac{(1, n)}{(2, n)} = \frac{(1, n-1)\, q_n + (1, n-2)}{(2, n-1)\, q_n + (2, n-2)}$$

on change q_n en x_n, on aura la valeur exacte de la fraction continue

$$x_1 = \frac{(1, n-1)\, x_n + (1, n-2)}{(2, n-1)\, x_n + (2, n-2)}.$$

5. Si dans la valeur de $\frac{(1, n)}{(2, n)}$ (voy. **4**) on remplace q_n par

$$q_n, q_{n+1}, \ldots q_k = \frac{(n, k)}{(n+1, k)},$$

on obtiendra

$$(1, k) = (1, n-1)\,(n, k) + (1, n-2)\,(n+1, k),$$
$$(2, k) = (2, n-1)\,(n, k) + (2, n-2)\,(n+2, k).$$

Ainsi, pour $n = 2$, on aura

$$(1, k) = (2, k)\, q_1 + (3, k);$$

et pour $k = n$, on aura

$$(1, n) = (1, n-1)\, q_n + (1, n-2).$$

6. La formule précédente conduit directement à cette conséquence que les fractions continues

$$q_1, q_2, \ldots q_n \quad \text{et} \quad q_n, q_{n-1}, \ldots q_2, q_1,$$

réduites en fractions ordinaires, ont le même numérateur. Ainsi *l'on peut renverser l'ordre des quotients sans changer la valeur des expressions* (g, k).

Kramp donnait le nom de *médiateurs* aux expressions (g, k). (Voy. son *Arithmétique universelle*.)

7. Si l'on considère la fraction continue

$$q_1, \ldots q_g, \ldots q_h, \ldots q_k,$$

elle conduira à l'équation

$$(1, h)(g, k) - (1, k)(g, h) = (-1)^{h-g}(1, g-2)(h+2, k).$$

Cette proposition étant la seule dont la démonstration ne se présente pas directement, il ne sera pas inutile de la développer, ce qui fera voir l'avantage du symbole $(1, g)$.

Les équations

$$(1, k) = (1, g-1)(g, k) + (1, g-2)(g+1, k),$$
$$(1, h) = (1, g-1)(g, h) + (1, g-2)(g+2, h),$$

donnent par l'élimination de $(1, g-1)$, l'équation

$$(1, h)(g, k) - (1, k)(g, h) = (1, g-2)[(g, k)(g+1, h) - (g, h)(g+1, k)].$$

Les équations

$$(g, k) = (g, h)(h+1, k) + (g, h-1)(h+2, k),$$
$$(g+1, k) = (g+1, h)(h+1, k) + (g+1, h-1)(h+2, k),$$

donnent, par l'élimination de $(h+1, k)$, l'équation

$$(g, k)(g+1, h) - (g, h)(g+1, k) = (h+2, k)[(g, h-1)(g+1, h) - (g, h)(g+1, h-1)].$$

Enfin les équations

$$(g, h) = (g, h-1)q_h + (g, h-2),$$
$$(g+1, h) = (g+1, h-1)q_h + (g+1, h-2),$$

donnent, par l'élimination de q_h, l'équation

$$(g, h-1)(g+1, h) - (g, h)(g+1, h-1) = -[(g, h-2)(g+1, h-1) - (g, h-1)(g+1, h-1)].$$

Le second membre de cette équation se tire du premier en diminuant h de l'unité et changeant le signe, ou en multipliant par -1. Ainsi, en diminuant h de f unités, il faudra multiplier par $(-1)^f$.

Le deuxième membre devient donc

$$(-1)^f[(g, h-f-1)(g+1, h-f) - (g, h-f)(g+1, h-f-1)].$$

Si l'on pose $g = h - f$, d'où $f = h - g$, il se réduit donc à

$$(-1)^{h-g}[(g, g-1)(g+1, g) - (g, g)(g+1, g-1)] = (-1)^{h-g}:$$

on a donc enfin

$$(1, h)(g, k) - (1, k)(g, h) = (-1)^{h-g}(1, g-2)(h+2, k).$$

Si dans cette équation on pose $g = 2$, on trouve

$$(1, h)(2, k) - (1, k)(2, h) = (-1)^h (h-2, k),$$

qui donne la différence de deux fractions convergentes $\frac{(1, k)}{(2, k)}$ et $\left(\frac{1, h}{2, h}\right)$.

Pour $h = k - 1$, on a

$$(1, k)(2, k-1) - (1, k-1)(2, k) = (-1)^k,$$

qui donne la différence de deux fractions convergentes consécutives $\frac{(1, k)}{(2, k)}$ et $\frac{(1, k-1)}{(2, k-1)}$.

La formule générale est de Kramp; elle peut être fort utile, comme on le verra plus bas.

II.

Proposition première.

« Pour réduire en fraction continue la plus grande racine positive de » l'équation

$$D_1 x_1^2 - 2I_1 x_1 - D_0 = 0,$$

» où D_1, I_1 sont des entiers positifs et D_0 un entier positif ou négatif, » il faudra faire le calcul suivant, dans lequel m représente le nombre » entier immédiatement au-dessous de $\sqrt{I_1^2 + D_0 D_1} = \sqrt{A}$.

Dividendes.	Diviseurs.	Quotients.	Restes.	Diff. des restes.
»	D_0,	»	$r_0 = m - I_1$,	
$\Delta_1 = m + I_1$,	D_1,	q_1,	r_1,	$d_1 = r_1 - r_0$,
$\Delta_2 = \Delta_1 - d_1$,	$D_2 = D_0 + q_1 d_1$,	q_2,	r_2,	$d_2 = r_2 - r_1$,
$\Delta_3 = \Delta_2 - d_2$,	$D_3 = D_1 + q_2 d_2$,	q_3,	r_3,	$d_3 = r_3 - r_2$,
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Delta_k = \Delta_{k-1} - d_{k-1}$,	$D_k = D_{k-1} + q_{k-1} d_{k-1}$,	q_k,	r_k,	$d_k = r_k - r_{k-1}$.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

» Cette racine positive, la plus grande des deux quand l'une et l'autre
» sont positives, sera

$$x_1 = \frac{\sqrt{A} + I_1}{D_1} = q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots q_k \ldots$$

» Si l'on voulait avoir l'autre racine positive, ou la racine négative
» prise positivement, les deux premières lignes du tableau deviendraient

»	$\pm D_0$,	»	$r_0 = m + I_1$,	
$\Delta_1 = m - I_1$,	$\mp D_1$,	q_1,	r_1,	$d_1 = r_1 - r_0$.

» le signe supérieur étant pris pour la racine positive, et l'inférieur
» pour la négative prise positivement. »

Démonstration. Si l'on pose

$$x_1 = \frac{\sqrt{A} + I_1}{D_1} = q_1 + \frac{1}{x_2},$$

q_1 étant l'entier immédiatement au-dessous de x_1, on trouvera

$$x_2 = \frac{\sqrt{A} + D_1 q_1 - I_1}{\frac{A - (D_1 q_1 - I_1)^2}{D_1}} = \frac{\sqrt{A} + I_2}{D_2},$$

sous les relations

$$I_2 = D_1 q_1 - I_1 \quad \text{et} \quad D_2 = D_0 + 2 I_1 q_1 - D_1 q_1^2.$$

Ainsi D_2 est entier et égale $\frac{A - I_2^2}{D_1}$; on a donc

$$A = I_1^2 + D_0 D_1 = I_2^2 + D_1 D_2;$$

de là l'algorithme suivant qui est celui de Lagrange, qui le donne comme fort simple,

$$\begin{array}{lll}
 & q_1 < \frac{\sqrt{A} + I_1}{D_1}, & I_2 = D_1 q_1 - I_1, \\
D_2 = D_0 + 2I_1 q_1 - D_1 q_1^2 = \frac{A - I_2^2}{D_1}, & q_2 < \frac{\sqrt{A} + I_2}{D_2}, & I_3 = D_2 q_2 - I_2, \\
D_3 = D_2 + 2I_2 q_2 - D_3 q_2^2 = \frac{A - I_3^2}{D_1}, & q_3 < \frac{\sqrt{A} + I_3}{D_3}, & I_4 = D_3 q_3 - I_3, \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

où l'on prend pour $q_1, q_2, q_3, \ldots$ les entiers immédiatement au-dessous de $\frac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}, \frac{\sqrt{A}+I_2}{D_2}, \frac{\sqrt{A}+I_3}{D_3} \ldots$

On peut, comme le fait Legendre, simplifier cet algorithme en remarquant que l'on a $\quad 2I_1 - D_1 q_1 = I_1 - I_2;$

d'où l'on tire

$$D_2 = D_0 + q_1(I_1 - I_2), \quad D_3 = D_1 + q_2(I_2 - I_3), \quad \text{etc.}$$

Mais de plus, comme les nombres $q_1, q_2, q_3, \ldots$ sont les nombres entiers immédiatement au-dessous de

$$\frac{m + I_1}{D_1}, \quad \frac{m + I_2}{D_2}, \quad \frac{m + I_3}{D_3}, \ldots$$

si l'on pose les équations

$$m + I_1 = D_1 q_1 + r_1, \quad m + I_2 = D_2 q_2 + r_2, \ldots$$

au lieu des équations

$$I_2 = D_1 q_1 - I_1, \quad I_3 = D_2 q_2 - I_2, \quad \text{etc.},$$

on trouvera celles-ci,

$$I_2 = m - r_1, \quad I_3 = m - r_2, \quad \text{etc.}$$

En posant pour l'analogie $I_1 = m - r_0$, il en résultera

$$I_1 - I_2 = r_1 - r_0 = d_1, \quad I_2 - I_3 = r_2 - r_1 = d_2, \quad \text{etc.}$$

De là résulte l'algorithme du tableau, car les Δ (ou les numérateurs dans lesquels $\sqrt{A}$ a été remplacé par m) peuvent se mettre immédiatement sous les formes

$$2m - r_0, \quad 2m - r_1, \quad 2m - r_2, \quad \text{etc.},$$

ou $$\Delta_1, \quad \Delta_2 = \Delta_1 - d_1, \quad \Delta_3 = \Delta_2 - d_2, \quad \text{etc.}$$

On pourrait encore prouver la chose synthétiquement. En effet, on a toujours $$I_k^2 + D_k D_{k-1} = I_{k+1}^2 + D_{k+1}.D_k = A;$$

car il en résulte $$(I_k + I_{k+1})(I_k - I_{k+1}) = D_k(D_{k+1} - D_{k-1}),$$

ou bien encore, en vertu des relations supposées,

$$(I_k + I_{k+1})\, d_k = D_k . q_k d_k,$$

qui se réduit à $$I_k + I_{k+1} = D_k q_k;$$

or cette équation résulte immédiatement de

$$\Delta_k = 2m - r_{k-1} = m - r_{k-1} + m - r_k + r_k = I_k + I_{k+1} + r_k$$

et de $$\Delta_k = D_k q_k + r_k.$$

On peut donc dans $$I_{k+1}^2 + D_{k+1}.D_k,$$

diminuer chaque indice de l'unité, et l'on tombe ainsi sur $I_1^2 + D_1 D_0 = A$.

Cela posé, on a toujours

$$\frac{\sqrt{A} + I_k}{D_k} = q_k + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{A} + I_{k+1}}{D_{k+1}}},$$

car cette équation se réduit à $A = I_{k+1}^2 + D_{k+1}.D_k$. La démonstration resterait la même pour la seconde racine, qui, comme on le verra plus tard, pourrait se déduire immédiatement de la seconde.

Exemples.

Comme il importe de se familiariser avec l'algorithme précédent qui conduit très rapidement au but, voici quelques exemples qui serviront d'ailleurs de vérification pour les propositions suivantes.

I. Résoudre l'équation $3x^2 - 19 = 0$. Ici $x = \sqrt{\frac{19}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{57}$. $A = I_1^2 + D_0 D_1 = 57$, d'où $m = 7$. On prendra les quatre nombres

$$D_0 = 19, \quad r_0 = m + I_1 = 7, \quad \Delta_1 = m + I_1 = 7, \quad D_1 = 3,$$

on les placera comme on le voit ci-dessous, et le reste du calcul ne sera qu'une suite de divisions semblables où le dividende et le diviseur seront donnés par des règles fort simples, représentées par les équations

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} - d_{k-1}, \quad D_k = D_{k-2} + q_{k-1} . d_{k-1},$$

de sorte que le plus souvent ils pourront s'obtenir immédiatement.

Δ	D	q	r	d
»	19	»	7	»
7	3	2	1	-6
13	7	1	6	5
8	8	1	0	-6
14	1	14	0	0
14	8	1	6	6
8	7	1	1	-5
13	3	4	1	0
* 13	7	1	6	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

La racine est $x_1 = 2(1, 1, 14, 1, 1, 4)$. En général N étant plus grand que l'unité, on trouvera, N étant rationnel, $\sqrt{N} = a(b, c, \ldots c, b, 2a)$; c'est-à-dire que la période est formée d'une partie symétrique suivie d'un quotient qui est le double de l'entier de la racine. On en verra plus loin la démonstration.

2. Le même calcul appliqué à l'équation $x^2 = 991$, donnerait

$$x = \sqrt{991} = 31\,(2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 20, 6, 4, {}^{*}31, 4, 6, 20, 1, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 8, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2, 62),$$

qui a la forme annoncée plus haut; la longueur de la période montre bien la nécessité de l'algorithme précédent.

3. Réduire en fractions continues les deux racines de l'équation

$$15x^2 - 18x - 5 = 0.$$

Racine positive $\quad D_0 = 5, \quad D_1 = 15, \quad m = 12, \quad r_0 = 3, \quad \Delta_1 = 21;$
Racine négative $\quad D_0 = 5, \quad D_1 = 15, \quad m = 12, \quad r_0 = 21, \quad \Delta_1 = 3.$

Racine positive.

	»	5	»	3	
*	21	15	1	6	3
	18	8	2	2	— 4
	22	7	3	1	— 1
	23	5	4	3	2
*	21	15	1	6	3
	⋮				

$x' = (1, 2, 3, 4)$

Racine négative.

	»	5	»	21	
	3	15	0	3	— 18
*	21	5	4	1	— 2
	23	7	3	2	1
	22	8	2	6	4
	18	15	1	3	— 3
*	21	5	4	1	— 2
	⋮				

$-x'' = 0\,(4, 3, 2, 1)$

La période de la seconde racine n'est autre que celle de la première renversée. Cela arrive pour toute équation du second degré. De plus, si la racine positive surpassant 1, la négative tombe entre 0 et -1, comme dans le cas présent, la période commence dès le premier quotient.

4. Résoudre l'équation $5x^2 - 42x + 11 = 0$?

$$A = 21^2 - 55 = 386, \quad m = 19, \quad I_1 = 21, \quad D_0 = -11, \quad D_1 = 5.$$

Première racine $\quad D_0 = -11, \quad r_0 = -2, \quad \Delta_1 = 40, \quad D_1 = 5.$
Deuxième racine $\quad -D_0 = 11, \quad r_0 = 40, \quad \Delta_0 = -2, \quad -D_1 = -5.$

3-

Première racine.

»	— 11,	»	— 2	»
40,	5,	8,	0,	2,
*38,	5,	7,	3,	3,
35,	26,	1,	9,	6,
29,	11,	2,	7,	— 2,
31,	22,	1,	9,	2**
29,	13,	2,	3,	— 6,
35,	10,	3,	5,	2,
33,	19,	1,	14,	9,
24,	19,	1,	5,	— 9,
33,	10,	3,	3,	— 2,
29,	22,	1,	7,	4,
31,	11,	2,	9,	2,
29,	26,	1,	3,	— 6,
35,	5,	7,	0,	— 3,
*38,	5,	7,	3,	3,
etc.				

Seconde racine.

»	11,	»	40,	»
— 2,	— 5,	0,	— 2,	— 42,
40,	11,	3,	7,	9,
**31,	22,	1,	9,	2,
etc.,	etc.,	etc.,	etc.,	etc.,

Le reste comme à la première racine.

Première racine,

$$x' = 8\,(7,\,1,\,2,\,1,\,2,\,3,\,1,\,1,\,3,\,2,\,1,\,2,\,1,\,7).$$

Deuxième racine,

$$x'' = 0,\,3\,(1,\,2,\,3,\,1,\,1,\,3,\,2,\,1,\,2,\,1,\,7,\,7,\,1,\,2);$$

ou bien encore,

$$x'' = 0,\,3,\,1,\,2,\,3,\,1,\,1,\,3,\,2,\,1,\,2,\,1,\,7\,(7,\,1,\,2\ldots 2,\,1,\,7)$$

Ici la période est symétrique, et l'on peut donner aux deux racines la même période en fixant convenablement l'origine de la période d'une des racines.

Nota. L'algorithme exposé plus haut ne diffère presque en rien de celui qui donne la réduction des formes binaires du second degré. (*Voyez* la note finale.)

III.

Proposition deuxième.

« Toute équation du second degré a ses racines exprimées par des » fractions continues périodiques, et réciproquement toute fraction » continue périodique est racine d'une équation du second degré. »

Développement. Pour l'équation $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ où D_1 et I_1 sont supposés positifs.

1°. $D_0 > 0$, racines de signes contraires x', $-x''$;

1^er^ *cas.* $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$, $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, $x' > 1$ et $x'' < 1$,

$$x' = (q_1, q_2, \ldots q_k), \quad x'' = 0(q_k, \ldots q_2, q_1);$$

2^e^ *cas.* $D_1 + 2I_1 - D_0 < 0$, $x' > 1$, $x'' > 1$,

$$x' = q_1(q_2, q_3, \ldots q_k, \overline{q_1 + Q_1}), \quad x'' = Q_1(q_k, \ldots q_3, q_2, \overline{q_1 + Q_1});$$

3ᵉ *cas*. $D_1 - 2I_1 - D_0 > 0, \quad x' < 1, \quad x'' < 1,$

$$x' = 0, q_1(q_2, q_3, \ldots q_k, \overline{q_1 + Q_1}), \; x'' = 0, Q_1(q_k, \ldots q_3, q_2, \overline{q_1 + Q_1}).$$

2°. $D_0 < 0$ racines de même signe;

1^re^ racine $x' = a, b, c, \ldots f, g\,(A, B, \ldots K, L, M)$;

2^me^ racine $g > M \quad x'' = a, b, \ldots f, \overline{g - M - 1}, 1, \overline{L - 1}\,(K \ldots B, A, M, L)$,

$g < M \quad x'' = a, b, \ldots \overline{f - 1}, 1, \overline{M - g - 1}\,(L, K, \ldots B, A, M)$.

(En faisant commencer au quotient M la période de la 2^me^ racine, on aura celle de la 1^re^ renversée.)

1. *Démonstration*. Le premier cas est celui de D_0 positif, sous les relations $D_1 - 2I_1 - D < 0$, $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$;

alors aux substitutions $\quad x = \infty, \; +1, \; 0, \; -1$

répondent des résultats de signe $\quad +, \; -, \; -, \; +.$

Il y a donc une racine positive > 1 et une racine négative < 1 en valeur absolue.

1°. Pour ce cas D_0, D_1, I_1 sont positifs. L'équation $A - D_0 D_1 = I_1^2$ montre que I_1 égale au plus m entier de $\sqrt{A}$; or

$$2m - r_0 = m + I_1 = D_1 q_1 + r_1$$

montre que l'on a $r_1 < m$. Cela est évident pour $D_1 = m$ ou $< m$, puisque l'on a $r_1 < D_1$. Si l'on avait $D_1 > m$, alors $r_1 > m$ rendrait $m + I_1 > 2m$, tandis que l'on a $m + I_1 < 2m$. Par conséquent $I_2 = m - r_1$ sera positif $< m$; $A - D_1 D_2 = I_2^2$ donnera D_1 positif, et ainsi de suite. Les D et les I sont donc essentiellement positifs. Or tous les I sont $< m$, tous les D sont $< D < m + I < 2m$. Par conséquent les quotients $\frac{\sqrt{A} + I}{D}$ sont en nombre limité $< m . 2m < 2A$. Une quantité telle que $\frac{\sqrt{A} + I_g}{D_g}$ devra donc nécessairement se reproduire, et dès lors la fraction continue sera périodique.

2°. La quantité $\frac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}$ se reproduit nécessairement. En effet, on a toujours $r_k < D_{k+1}$, car de $A - I_{k+1}^2 = D_k . D_{k+1}$, on tire

$$A - (m - r_k)^2 = D_k . D_{k+1};$$

d'ou $r_k(2m - r_k) < D_k . D_{k+1}$; or $2m - r_{k-1} = D_k q_k + r_k$; d'ou $2m - r_k = D_k q_k + r_{k-1}$; donc $D_k . q_k . r_k < D_k . D_{k+1}$, et *à fortiori* $r_k > D_{k+1}$.

On a aussi $r_0 = m - I_1 < D_1$, car $\frac{\sqrt{A}-I_1}{D_1} < 1$ donne $m < D_1 + I_1$.

Si l'on suppose que le quotient complet $\frac{\sqrt{A}+I_g}{D_g}$ se représente apres k termes et qu'on ait $\quad I_g = I_{g+k}, D_g = D_{g+k}$,

les équations $\quad A - I_g^2 = D_g . D_{g-1}, \quad A - I_{g+k}^2 . D_{g+k-1}$.

donneront $\quad D_{g-1} = D_{g+k-1}$;

puis les équations $\quad I_g = m - r_{g-1}, \quad I_{g+k} = m - r_{g+k-1}$.

donneront $r_{g-1} = r_{g+k-1}$; enfin les équations

$2m - r_{g-2} = D_{g-1} . q_{g-1} + r_{g-1}, \quad 2m - r_{g+k-2} = D_{g+k-1} . q_{g+k-1} + r_{g+k-1}$

donneront $r_{g-2} - r_{g+k-2} = D_{g-1}(q_{g-1} - q_{g+k-1})$, et comme on a

$$r_{g-2} < D_{g-1}, \quad r_{g+k-2} < D_{g+k-1} < D_{g-1},$$

il en résultera $\quad r_{g-2} = r_{g+k-2}, \quad q_{g-1} = q_{g+k-1}$;

d'où $I_{g-1} = I_{g+k-1}$, et ainsi de suite.

Si donc g était $> K$, on trouverait

$$I_g = I_{g-k} = I_{g-2k}, \ldots \quad D_g = D_{g-k} = D_{g-2k}, \ldots;$$

on peut donc supposer $g < K$, et l'on voit par là que le quotient $\frac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}$ doit se reproduire. Ainsi la première racine sera $x' = (q_1, q_2, \ldots q_k)$, c'est-à-dire périodique dès le premier quotient.

3°. La deuxième racine est au signe près

$$\frac{\sqrt{A}-I_1}{D_1}=\frac{\sqrt{A}-I_{nk+1}}{D_{nk+1}}=\frac{D_{nk}}{\sqrt{A}+I_{nk+1}}=0+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{A}+I_{nk+1}}{D_{nk}}};$$

mais on a en général

$$\frac{\sqrt{A}+I_h}{D_{h-1}}=q_{h-1}+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{A}+I_{h-1}}{D_{h-2}}};$$

et par conséquent $\qquad -x''=0(q_k,\, q_{k+1},\ldots q_3,\, q_1),$

ainsi la période est celle de la première racine renversée.

4°. Réciproquement, soit $x_1=q_1, q_2,\ldots q_k,\, x_{k+1}$;

on en tirera $\qquad x_1=\dfrac{(1,\,k)\,x_{k+1}+(1,\;k-1)}{(2,\;k)\,x_{k+1}+(2,\;k-1)},$

et comme $\qquad x_1=x_{k+1},$

on aura $\quad (2,\,k)\,x_1^2-[(1,\,k)-(2,\,k-1)]\,x_1-(1,\,k-1)=0,$

ou $\qquad D_1\,x_1^2-2I_1\,x_1-D_0=0,$

en supposant $(2,k)=\Psi D_1$, $(1,k)-(2,k-1)=2\Psi I_1$, $(1,k-1)=\Psi D_0$:

D_1, D_0, I_1 seront positifs et satisferont aux conditions

$$D_1-2I_1-D_0<0,\quad D_1+2I_1-D_0>0.$$

On aura Ψ entier si $(1,k)-(2,k-1)$ est pair; dans le cas contraire, Ψ aura 2 pour dénominateur.

On voit également que toute fraction continue périodique

$$x=q_1, q_2,\ldots q_k\,(q_{k+1}\ldots q_{k+n})$$

est racine d'une équation du second degré, car en posant

$$z=q_{k+1},\ldots q_{k+n},z,$$

on aura un résultat de forme $z=\frac{\alpha z+\alpha'}{\beta z+\beta'}$; et comme $x=q_1\ldots q_k,z$, on aura également $x = \frac{\gamma z + \gamma'}{\delta z + \delta'}$. L'élimination de z donnera une équation en x du second degré. La réciproque est donc prouvée pour tous les cas.

2. Supposons maintenant D_0 positif et la seule condition...... $D_1 + 2I_1 - D_0 < 0$ qui entraîne $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$; ici les deux racines sont, abstraction faite du signe, plus grandes que l'unité. On posera $x = q_1 + \frac{1}{y}$, q_1 étant le plus grand nombre entier compris dans la racine positive. Pour cette racine y sera essentiellement positif. La transformée sera

$$(D_1 q_1^2 - 2I_1 q_1 - D_0)y^2 + 2(D_1 q_1 - I_1)y + D_1 = 0,$$

ou bien
$$D_2 y^2 - 2I_2 y - D_1 = 0,$$

qui satisfait aux conditions

$$D_2 + 2I_2 - D_1 > 0, \quad D_2 - 2I_2 - D_1 < 0,$$

qui reviennent à celles-ci,

$$-D_1(q_1 - 1)^2 + 2I_1(q_1 - 1) + D_0 > 0,$$
$$-D_1(q_1 + 1)^2 + 2I_1(q_1 + 1) + D_0 < 0,$$

évidemment satisfaites puisque x tombe entre $q_1 - 1$ et $q_1 + 1$.

Les deux valeurs de y sont donc

$$y' = (q_2, \ldots q_{k+1}), \quad y'' = -0(q_{k+1}, \ldots q_2).$$

La première valeur de x est $x' = q_1(q_2, \ldots q_{k+1})$, et la seconde $x'' = q_1 - q_{k+1} - \frac{1}{q_{k+2} \ldots}$, mais elle doit être négative; il faut donc poser $q_1 < q_{k+1}$, puisque $q_1 = q_{k+1}$ donnerait $x' = (q_1, q_2, \ldots q_k)$, ce qui n'est pas. On peut donc faire $q_{k+1} = q_1 + Q$; d'où les formules de l'énoncé.

3. Les conditions $D_0 > 0$, $D_1 - 2I_1 - D_0 > 0$, qui entraînent $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, expriment que les deux racines sont au signe près < 1 et conduisent de suite aux formules de l'énoncé; car en posant $x = -\frac{1}{y}$, on a une équation qui tombe dans le cas précédent.

4. Le cas de $D_0 < 1$ ou des deux racines positives, se ramène aux précédents ($D_0 > 1$), car en posant $x_1 = q_1$, x_2, ou $= q_1, q_2$, x_3, ou $q_1, q_2, q_3, x_4, \ldots$ une des transformées $Ax_n^2 + 2Bx_n + C = 0$ aura ses termes extrêmes de signes différents [*], et par conséquent ses racines exprimées par des fractions continues périodiques. Cela vient d'être démontré pour le cas où le terme moyen est négatif; s'il était positif, le changement de signe ne ferait que changer le signe des racines.

Comme la valeur positive de y surpasse l'unité

$$x' = a, b, \ldots f, g\,(A, B, \ldots K, L, M),$$

et si l'on fait
$$y' = (A, B, \ldots K, L, M),$$

la deuxième valeur de y sera $y'' = -0\,(M, L, \ldots B, A)$.

D'après cela les deux valeurs de x s'obtiendront en mettant dans $x = a, b, \ldots f, g, y$, les deux valeurs de y.

On ne peut ici supposer $g = M$, si l'origine de la période est bien fixée, il faut donc examiner les deux cas $g > M$ et $g < M$.

1°. Si l'on a $g > M$, on trouvera pour $g + \frac{1}{y}$, en mettant pour y sa deuxième valeur,

$$g - M - \cfrac{1}{L + \cfrac{1}{K + \ldots}} = (g - M) - \cfrac{1}{L + \cfrac{1}{K + \ldots}} = (g - M - 1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{L - 1 + \cfrac{1}{K + \ldots}}},$$

puisque $p - \frac{1}{q} = p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - 1}}$; on aura donc

$$x'' = a, b, \ldots f, g - M - 1, 1, L - 1(K, \ldots B, A, M, L).$$

---

[*] Si l'on représente par $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$, deux fractions convergentes consécutives vers x, et assez rapprochées pour ne contenir entre elles qu'une racine, en posant $x = \frac{p'y + p}{q'y + q}$, la transformée en y remplit la condition, car ses termes extrêmes ont pour coefficients

$$q'^2\left[D_0\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 - 2I_1\left(\frac{p'}{q'}\right) - D_1\right],\quad q^2\left[D_1\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2I_1\left(\frac{p}{q}\right) - D_0\right].$$

2°. Si l'on a au contraire $g < \text{M}$, il en résulte pour $g + \frac{1}{y}$, quand on y remplace y par sa seconde valeur,

$$g + \frac{1}{y} = g - \text{M} - \frac{1}{\text{L}+\ldots} = -\left[(\text{M}-g) + \frac{1}{\text{L}+\ldots}\right].$$

En conséquence $f + \cfrac{1}{g + \cfrac{1}{y}}$

deviendra $$f - \cfrac{1}{(\text{M}-g) + \cfrac{1}{\text{L}+\ldots}} = (f-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\text{M}-g-1 + \cfrac{1}{\text{L}+\ldots}}},$$

et par suite on aura

$$x'' = a, b, \ldots \overline{f-1}, 1, \overline{\text{M}-g-1}(\text{L}, \text{R}, \ldots \text{B}, \text{A}, \text{M}).$$

Si l'un des quotients $g - \text{M} - 1$, $\text{L} - 1$, $f - 1$, $\text{M} - g - 1$ devient nul, et que ce ne soit pas le premier, il faudra le faire disparaître au moyen de la formule $a + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{b}} = a + b$, c'est-à-dire qu'il faudra effacer le quotient nul et réunir en un seul les deux entre lesquels il tombait.

Dans tous les cas, on voit que la seconde racine est périodique comme la première, et que sa période n'est que celle de la première renversée, pourvu qu'on prenne M pour le premier terme de la période de la seconde racine.

IV.

Proposition troisième.

« Pour que les deux racines d'une équation du second degré soient
» des fractions continues de même période, il faut et il suffit que la
» période de la première racine soit symétrique $(a, b, \ldots b, a)$, ou
» bien symétrique précédée d'un quotient $(m, a, b \ldots b, a)$, ou enfin
» symétrique suivie d'un quotient.

» *Développement.* Pour l'équation

$$\text{D}_1 x_1^2 - 2\text{I}_1 x_1 - \text{D}_0 = 0, \qquad \text{et } \text{D}_0 > 0;$$

1°. $\text{D}_1 = \text{D}_0$, $x' = (a, b, \ldots b, a)$, $-x'' = 0(a, b, \ldots b, a)$;

$$2^{\circ}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}D_1+2I_1-D_0>0,\\ D_1-2I_1-D_0<0,\\ \dfrac{2I_1}{D_1}=m,\end{array}\right\}\quad\begin{array}{r}x'=-(m,a,b,\ldots b,a)\\ =m(a,b,\ldots b,a,m),\\ -x''=0(a,b,\ldots b,a,m),\end{array}\\ \left.\begin{array}{r}D_1+2I_1-D_0<0,\\ \dfrac{2I_1}{D_1}=m;\end{array}\right\}\quad\begin{array}{r}x'=\overline{m+A}\left(a,b,\ldots b,a,\overline{m+2A}\right),\\ -x''=A\left(a,b,\ldots b,a,\overline{m+2A}\right);\end{array}\end{array}\right.$$

$$3^{\circ}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}D_1+2I_1-D_0>0,\\ D_1-2I_1-D_0<0,\\ \dfrac{2I_1}{D_0}=m,\end{array}\right\}\quad\begin{array}{r}x'=(a,b,\ldots b,a,m),\\ -x''=0(m,a,b,\ldots b,a)\\ =0,m(a,b,\ldots b,a,m),\end{array}\\ \left.\begin{array}{r}D_1-2I_1-D_0>0,\\ \dfrac{2I_1}{D_0}=m,\end{array}\right\}\quad\begin{array}{r}x'=0,\overline{m+A}\left(a,b,\ldots b,a,\overline{m+2A}\right),\\ -x''=0,A\left(a,b,\ldots b,a,\overline{m+2A}\right);\end{array}\end{array}\right.$$

» toutes ces propositions ayant chacune leur proposition réciproque.

» Pour $D_0 < 0$, il faudra et il suffira qu'une transformée de l'équa-
» tion $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ tombe dans le cas précédent ; c'est-à-dire
» que les coefficients extrêmes étant de signes contraires ils soient égaux,
» ou que l'un d'eux divise le coefficient moyen. »

1. *Démonstration.* La période de la seconde racine n'étant autre que celle de la première renversée, il faudra rendre identiques les deux périodes

$$\begin{array}{l} q_1,\quad q_2,\quad q_3,\ldots\ldots q_{n-g},\ q_{n-g+1},\ldots\ldots q_n,\\ q_{n-g},\ q_{n-g-1},\ \ldots\ldots q_1,\quad q_n,\ldots\ldots\ldots\ldots g_{n-g+1},\end{array}$$

ce qui montre que la première période est composée de deux parties symétriques

$$a,\ b,\ldots b,\ a,\ p,\ q,\ldots q,\ p.$$

D'abord si l'une d'elles, la première, par exemple, est composée d'un nombre pair de termes $a, b,\ldots m, m,\ldots b, a$, en transposant $a, b,\ldots m$, on en déduira la période symétrique

$$m\ldots b,\ a,\ p,\ q,\ldots q,\ p,\ a,\ b,\ldots m.$$

Mais si l'une d'elles est composée d'un nombre impair de termes

$ab, \ldots m, n, m, \ldots b, a$, on en déduira à volonté

$$n, m, \ldots b, a, p, q, \ldots q, p, a, b, \ldots m,$$

ou bien, $$m, \ldots b, a, p, q, \ldots q, p, a, b, \ldots m, n,$$

c'est-à-dire une période symétrique précédée ou suivie d'un quotient. Ces deux dernières formes coexistent toujours et n'excluent point nécessairement la première.

2. Si une équation a pour racine $x' = (a, b, \ldots b, a)$, elle sera de la forme $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$, $D_0 = D_1$.

Cela suit immédiatement de ce que la seconde racine est en changeant son signe $-x'' = 0\,(a, b, \ldots b, a) = \frac{1}{x'}$. Le produit des racines est donc $-1 = -\frac{D_0}{D_1}$, d'où $D_0 = D_1$; quant à la somme des racines, elle est positive, ce qui exige que le terme moyen soit négatif.

Réciproquement, l'équation $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ conduira à une période symétrique pour $D_1 = D_0$; car elle satisfait aux conditions $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$, $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, qui pour $D_0 = D_1$ se réduisent à $I_1 > 0$. Il faudra donc prendre pour première racine $x' = (a, b, \ldots f, g)$, et comme $-x'' = 0\,(g, f, \ldots b, a)$, et que d'ailleurs $x'\,x'' = -1$, d'où $x' = -\frac{1}{x''}$, il en résultera

$$(a, b, \ldots f, g) = (g, f, \ldots b, a),$$

d'où l'on tire nécessairement

$$a = g, \quad b = f \ldots g = a,$$

et par conséquent, $x' = (a, b, \ldots b, a)$.

3. Si une équation a pour racine $x' = (m, a, b, \ldots b, a)$, elle aura la forme $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$ sous la relation $\frac{2I_1}{D_1} = m$, et les conditions $D_1 + 2I_1 - D_0 > 0$, $D_1 - 2I_1 - D_0 < 0$, qui résultent de la forme supposée à x'. En effet, $-x'' = 0\,(a, b, \ldots b, a, m)$, et comme l'on a $x' = (m, a, b, \ldots b, a) = m(a, b, \ldots b, a, m)$, il en résultera $x' + x'' = \frac{2I_1}{D_1} = m$.

Si au contraire on a $x'=(a, b, \ldots b, a, m)$, on en tirera $\frac{2I_1}{D_0}=m$. On fera $x=-\frac{1}{y}$, les deux valeurs de y seront $-0(a, b, \ldots b, a, m)$ et $(m, a, b, \ldots b, a)$, dont la somme est $m=\frac{2I_1}{D_0}$, en vertu de

$$D_0 y^2 - 2I_1 y - D_1 = 0.$$

Réciproquement, soit l'équation $D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$, si l'on a

$$D_1 - 2I_1 - D_0 < 0, \quad D_1 + 2I_1 - D_0 > 0, \quad \frac{2I_1}{D_1} = m,$$

la racine positive sera $x' = (m, a, b, \ldots b, a)$.

En effet, posons $x'=(a,b,\ldots f,g)$, on en déduira $-x''=0(g,f,\ldots b,a)$, et comme $x'+x''=\frac{2I_1}{D}=m$, il faudra avoir $a+\frac{1}{b+\ldots}-\left(\frac{1}{g+\ldots}\right)=m$, d'où suit nécessairement $a=m$ et $(b,f,\ldots f,g)=(g,f,\ldots b)$, ce qui donne $b=g$, $c=f$ et $x'=(m, b, c, \ldots c, b)$, ou bien encore,

$$x' = (m, a, b, \ldots b, a).$$

Si ensuite on change x en $-\frac{1}{y}$, on montrera absolument de même que pour $\frac{2I_1}{D_0}=m$, sous les mêmes conditions, on a les formules de l'énoncé.

4. Si l'on a $D_1 + 2I_1 - D_0 < 0$, on ne peut avoir $\frac{2I_1}{D_0}$ entier, sauf le cas $I_1 = 0$ qui sera traité plus bas. Mais si l'on pose $x = q_1 + \frac{1}{y}$, la transformée en y tombe dans le cas précédent et conduit de suite aux racines

$$x' = \overline{m+Q}\,(b, c, \ldots c, b.\overline{m+2Q}), \quad -x''=Q\,(b,c,\ldots c,b,m+2Q),$$

(Proposition 2^e; dév. 1°).

5. Si l'on a $D_1 - 2I_1 - D_0 > 0$, on peut bien avoir $\frac{2I_1}{D_0}$ entier, mais non $\frac{2I_1}{D_1}$ entier. Dans ce cas, en posant $x=-\frac{1}{y}$, on trouvera de suite les formules de l'énoncé.

Les réciproques de 4 et 5 se prouvent comme celle de 3. Pour le cas de $I_1 = 0$, les racines deviennent égales et de signes contraires. Il faut faire $m = 0$, d'où

$$x = \pm A(b, c, \ldots c, b, 2A), \quad x' = \pm 0, A(b, c, \ldots c, b, 2A),$$

selon que $\frac{D_0}{D_1}$ est $>$ ou < 1.

Les cas $D_1 = 1$, $D_0 = 1$ donnent aussi deux racines ayant même période, puisque alors les quantités $\frac{2I_1}{D_0}$, $\frac{2I_1}{D_0}$ sont entières.

N. B. Ces cas particuliers $D_1 = D_0$, $\frac{2I_1}{D_1}$ entier et $\frac{2I_1}{D_0}$ entier, devant être distingués avec soin dans la résolution de l'équation indéterminée $D_1 x^2 - 2I_1 xy - D_0 y^2 = M$, nous avons cru devoir les exposer avec quelque détail.

Le cas de D_0 négatif se ramène, comme on l'a vu, à celui de D_0 positif, et ce qui a été dit dans l'énoncé suffit à cet égard.

V.

Proposition quatrième.

« Si l'on représente par $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(m)}$, les numérateurs, et par » $\beta, \beta', \beta'', \ldots \beta^{(m)}$, les dénominateurs des fractions convergentes » vers la racine $x' = q_1, q_2, \ldots q_g (q_{g+1}, \ldots q_{g+n})$ de l'équation du » second degré et terminées respectivement aux quotients périodiques » $q_k, q_{k+n}, q_{k+2n}, \ldots$ dont le premier appartient à la première pé- » riode, les nombres $\alpha, \alpha', \ldots \beta, \beta', \ldots$ formeront deux séries récur- » rentes de même échelle, de sorte qu'on aura

$$\alpha^{(m)} = 2\varphi\alpha^{(m-1)} - \varepsilon\alpha^{(m-2)}, \quad \beta^{(m)} = 2\varphi\beta^{(m-1)} - \varepsilon\beta^{(m-2)}.$$

» De plus, si $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\gamma'}{\delta'}$ représentent les fractions convergentes

$$\frac{(g+1, \ g+n-1)}{(g+2, \ g+n-1)}, \quad \frac{(g+1, \ g+n)}{(g+2, \ g+n)},$$

» on aura
$$2\varphi = \gamma' + \delta, \quad \varepsilon = (-1)^n,$$

» le nombre n étant celui des termes de la période. L'échelle de relation 2φ, $-\varepsilon$ sera la même pour les deux racines, et quel que soit le » quotient initial q_k.

» Si l'on pose $(\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m = \Phi + \Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon}$,

» on aura
$$\alpha^{(m)} = \alpha\Phi + (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi,$$
$$\beta^{(m)} = \beta\Phi + (\beta' - \varphi\beta)\Psi,$$

» et si dans ces formules on change le signe de Ψ, on aura des fractions convergentes vers la seconde racine et terminées respectivement aux quotients périodiques $q_{k'}$, $q_{k'+n}$, $q_{k'+2n}\ldots$ L'indice k' est $n-k$ si l'on pose
$$x' = (q_1, q_2, \ldots q_k, \ldots q_n),$$
» d'où
$$-x'' = o(q_n, q_{n-1}, \ldots q_1) = q'_1, q'_2, q'_3, \ldots$$
» cet indice étant compté à partir du premier terme de x''; ce serait » $k+2$ si l'on gardait l'indice de la première racine. »

1. *Démonstration*. Si l'on représente par α_1, $\alpha'_1, \ldots$ les numérateurs, et par β_1, $\beta'_1, \ldots$ les dénominateurs des fractions convergentes qui précèdent $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}\ldots$, on aura, en vertu de la formule
$$(1, n) = (1, g)(g+1, n) + (1, g-1)(g+2, n) \quad (\textit{prélimin. } 5),$$
les équations
$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = \alpha\gamma' + \alpha_1\delta', \\ \alpha'' = \alpha'\gamma' + \alpha'_1\delta', \\ \alpha''' = \alpha''\gamma' + \alpha''_1\delta', \\ \vdots \\ \alpha^{(m-1)} = \alpha^{(m-2)}\gamma' + \alpha_1^{(m-2)}\delta', \\ \alpha^{(m)} = \alpha^{(m-1)}\gamma' + \alpha_1^{(m-1)}\delta'; \end{array}\right\} \text{et pareillement} \left\{\begin{array}{l} \alpha'_1 = \alpha\gamma + \alpha_1\delta, \\ \alpha_1 = \alpha'\gamma + \alpha'_1\delta, \\ \alpha'''_1 = \alpha''\gamma + \alpha''_1\delta. \\ \vdots \\ \alpha_1^{(m-1)} = \alpha^{(m-2)}\gamma + \alpha_1^{(m-2)}\delta, \\ \alpha_1^{(m)} = \alpha_1^{(m-1)}\gamma + \alpha_1^{(m-1)}\delta; \end{array}\right.$$
d'où l'on tire
$$\begin{aligned} \alpha^{(m)} &= \alpha^{(m-1)}\gamma' + [\alpha^{(m-2)}\gamma + \alpha_1^{(m-2)}\delta]\delta', \\ &= \alpha^{(m-1)}\gamma' + \alpha^{(m-2)}\gamma\delta' + \alpha_1^{(m-2)}\delta\delta', \\ &= \alpha^{(m-1)}\gamma' + \alpha^{(m-2)}\gamma\delta' + [\alpha^{(m-1)} - \alpha^{(m-2)}\gamma')\delta, \\ &= \alpha^{(m-1)}(\gamma' + \delta) - (\delta\gamma' - \gamma\delta')\alpha^{(m-2)} = 2\varphi.\alpha^{(m-1)} - \varepsilon\alpha^{(m-2)}. \end{aligned}$$
On obtient semblablement $\beta^{(m)} = 2\varphi.\beta^{(m-1)} - \varepsilon\beta^{(m-2)}$.

2. Puisque $2\varphi=\gamma'+\delta=(k+1,\ k+n)+(k+2,\ k+n-1)$, quand on renversera la période et qu'on remplacera $q_{k+1}, q_{k+2},\ldots q_{k+n}$ par $q_{k+n}, q_{k+n-1},\ldots q_{k+1}$, les médiateurs $(k+1, k+n)$ et...... $(k+2, k+n-1)$ ne changeront pas, de sorte que 2φ ne changera pas, et il en est de même de $\varepsilon=(\delta\gamma'-\gamma\delta')=(-1)^n$ (*prélimin.* **7**). Or le renversement a lieu pour la période de la seconde racine; donc pour cette racine l'échelle de relation reste la même.

Si l'on fait commencer la période un terme plus loin et que q_{k+1}, $q_{k+2},\ldots q_{k+n}$ soit remplacé par

$$q_{k+2}, q_{k+3},\ldots q_{k+n}, q_{k+n+1} \ (q_{k+n+1}=q_{k+1}),$$

alors $$2\varphi=(k+1, k+n)+(k+2, k+n-1)$$

deviendra $$2\varphi'=(k+2, k+n+1)+(k+3, k+n),$$

et comme on a (*prélimin.* **5**)

$$\begin{aligned}(k+1,\ k+n)\ &= q_{k+1}\ (k+2, k+n)+(k+3, k+n),\\ (k+2, k+n+1)&=q_{k+n+1}(k+2, k+n)+(k+2, k+n-1),\end{aligned}$$

il en résultera, à cause de $q_{k+1}=q_{k+n+1}$,

$$(k+1, k+n)+(k+2, k+n-1)=(k+2, k+n+1)+(k+3, k+n),$$

ou $$2\varphi=2\varphi';$$

c'est-à-dire que l'échelle de relation 2φ, $-\varepsilon$ reste la même, quel que soit le quotient initial.

3. Soit ax^m+by^m le terme général de la série récurrente dont l'échelle de relation est 2φ, $-\varepsilon$, il faudra avoir

$$ax^m+by^m-2\varphi(ax^{m-1}+by^{m-1})+\varepsilon(ax^{m-2}+by^{m-2})=0,$$

ou $$ax^{m-2}(x^2-2\varphi x+\varepsilon)+by^{m-2}(y^2-2\varphi y+\varepsilon)=0.$$

Il suffira donc de prendre pour x et y les deux racines de l'équation

$$z^2-2\varphi z+\varepsilon=0,$$

ou $$x=\varphi+\sqrt{\varphi^2-\varepsilon},\quad y=\varphi-\sqrt{\varphi^2-\varepsilon},$$

ce qui donne pour terme général

$$a\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}\right)^m+b\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}\right)^m;$$

et si l'on pose $\quad\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-2}\right)^m=\Phi+\Psi\sqrt{\varphi^2-\varepsilon},$

on aura aussi $\quad\left(\varphi-\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}\right)^m=\Phi-\Psi\sqrt{\varphi^2-\varepsilon},$

ce qui réduit le terme général à

$$(a+b)\Phi+(a-b)\Psi\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}.$$

On déterminera les constantes en faisant répondre les valeurs initiales α, α' à $m=0$ et $m=1$; on a ainsi

$$a+b=\alpha,\quad (a+b)\varphi+(a-b)\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}=\alpha',$$

ou bien $\quad a+b=\alpha;\quad (a-b)\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}=\alpha'-\varphi.\alpha,$

d'où les formules

$$\alpha^{(m)}=\alpha\Phi+(\alpha'-\varphi\alpha)\Psi,\quad \beta^{(m)}=\beta.\Phi+(\beta'-\varphi.\beta)\Psi,$$

sous la relation

$$\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}\right)^m=\Phi+\Psi\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}.$$

4. Si l'on remarque que $2\Phi=x^m+y^m$ et $2\Psi\sqrt{\varphi^2-\varepsilon}=x^m-y^m$ sont des suites récurrentes de même échelle 2φ, $-\varepsilon$, on en conclura qu'il en est de même des quantités

$$\alpha\Phi-(\alpha'-\varphi\alpha)\Psi,\quad \beta\Phi-(\beta'-\varphi\beta)\Psi,$$

où l'on ferait successivement $m=1, 2, 3\ldots$

Or si dans ces formules on fait successivement $m=1$ et $m=2$, on trouvera, comme on va le voir, deux convergentes vers la deuxième racine à période inverse; de sorte que le changement de signe de Ψ donnera les formules correspondantes à la seconde racine, puisque l'échelle étant la même, il suffit d'obtenir deux convergentes pour avoir toutes les autres.

Pour prouver l'assertion précédente, soit d'abord l'équation

$$D_1 x^2 - 2I_1 x - D_0 = 0$$

satisfaisant aux deux conditions

$$D_1 + 2I_1 - D_0 > 0, \quad D_1 - 2I_1 - D_0 < 0,$$

de sorte que les racines x' et x'' sont telles, que

$$x' = (q_1 . q_2 \ldots q_n),$$
$$-x'' = 0(q_n, q_{n-1}) \ldots q_1) = q'_1(q'_2, q'_3, \ldots q'_{n+1}).$$

Considérons, dans la première racine, les deux convergentes terminées respectivement aux quotients q_k, q_{k+n}, convergentes qui sont représentées par $\frac{(1,k)}{(2,k)}$, $\frac{(1,k+n)}{(2,k+n)}$. Dans la seconde racine, si nous calculons les convergentes terminées aux quotients q'_{n-k} et q'_{n-k+n} (ou bien q_{k+2}, q_{k+n+2}, si nous considérons les quotients de la première racine), la première convergente prise positivement est égale à

$$0, q_n, q_{n-1}, \ldots q_{k+2} = 0 + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{k+2}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{(n, k+2)}{(n-1, k+2)}} = \frac{(n-1, k+2)}{(n, k+2)};$$

en renversant l'ordre des quotients, ce qui est permis, cette première convergente deviendra $\frac{(k+2, n-1)}{(k+2, n)}$.

La seconde convergente prise positivement, qui n'est autre que

$$0, q_n, q_{n-1}, \ldots q_{k+2}, q_{k+1}, \ldots q_1 \mid q_n, q_{n-1}, \ldots q_{k+2},$$

sera donc égale à

$$\frac{(1, n-1)(k+2, n) + (2, n-1)(k+2, n-1)}{(1, n)(k+2, n) + (2, n)(k+2, n-1)},$$

les médiateurs $(1, n)$, $(2, n)$, $(k+2, n)$, etc., étant toujours tirés de la première racine $(q_1, q_2, \ldots q_n)$ en vertu de ce qu'il est permis de renverser l'ordre des quotients.

Cela posé, pour $m = 1$, la quantité $\alpha\Phi - (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi$ devient, à cause de $\Phi = \varphi$, $\Psi = 1$, égale à $2\varphi\alpha - \alpha'$, ou bien

$$\begin{aligned}2\varphi\alpha - \alpha' &= [(1, n) + (2, n-1)](1, k) - (1, k+n)\\ &= [(1,n)+(2,n-1)](1,k) - [(1,n)(n+1, k+n) + (1, n-1)(n+2, k+n)];\end{aligned}$$

mais $\quad (n+1, n+k) = (1, k), \quad (n+2, k+n) = (2, k)$;

d'où

$$2\varphi\alpha - \alpha' = (1,k)(2, n-1) - (2, k)(1, n-1) = (-1)^k(k+2, n-1)$$

(prélimin. **7**). On trouve précisément de même

$$2\varphi\beta - \beta = -(-1)^k(k+2, n),$$

de sorte que la première convergente se réduit à $-\frac{(k+2, n-1)}{(k+2, n)}$, comme on l'a vu plus haut.

Ensuite pour $m = 2$, la quantité $\alpha\varphi - (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi$ devient, à cause de $\Phi = 2\varphi^2 - \varepsilon$, $\Psi = 2\varphi$, égale à

$$\begin{aligned}\alpha(2\varphi^2 - \varepsilon) - (\alpha' - \varphi\alpha)2\varphi &= 2\varphi(2\alpha\varphi - \alpha') - \varepsilon.\alpha\\ &= [(1, n) + (2, n-1)](k+2, n-1)(-1)^k - (1, k)(-1)^n.\end{aligned}$$

Or, en divisant par $(-1)^k$ et remarquant que

$$(1, n)(k+2, n-1) - (1, n-1)(k+2, n) = (-1)^{n-k}(1, k),$$

(comme on le voit en remplaçant g, h, k, par $k+2$, $n-1$, n, dans la formule générale de l'article **7**, prop. prélim.), il en résultera

$$(1, n-1)(k+2, n) + (2, n-1)(k+2, n-1),$$

numérateur de la seconde convergente. Le dénominateur se trouve de la même manière.

Ainsi, pour ce premier cas, les formules

$$\begin{aligned}\alpha^{(m)} &= \alpha\Phi - (\alpha' - \varphi\alpha)\Psi,\\ \beta^{(m)} &= \beta\Phi - (\beta' - \varphi\beta)\Psi,\\ (\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon})^m &= \Phi + \Psi\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon},\end{aligned}$$

donnent les convergentes vers la seconde racine.

Pour toute équation du second degré, on trouvera une transformée

$$D_{g+1}\; x_{g+1}^2 - 2I_{g+1}\; x_{g+1} - D_g = 0,$$

tombant dans le cas précédent, c'est-à-dire que les convergentes vers x_{g+1} seront données par la double formule

$$\frac{A\Phi \pm B\Psi}{C\Phi \pm D\Psi},$$

et comme on a

$$x = \frac{(1, g)\, x_{g+1} + (1, g-1)}{(2, g)\, x_{g+1} + (2, g-1)},$$

en remplaçant x_{g+1} par $\frac{A\Phi \pm B\Psi}{C\Phi \pm D\Psi}$,

on trouvera un résultat de même forme pour exprimer les convergentes vers les deux valeurs de x. Seulement, pour la seconde racine, en raison des termes négatifs qu'il faudra faire disparaître, les premières valeurs pourront bien n'être pas comprises parmi les fractions convergentes.

Note sur la réduction des formes.

Si dans l'expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$, que M. Gauss nomme *forme binaire du second degré,* et qu'il représente par le symbole (a, b, c), on pose $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, on trouvera une nouvelle forme $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$, les nombres a', b', c', entiers aussi bien que a, b, c et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, étant donnés par les équations

$$a' = ax^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \quad b' + a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2,$$

qui entraînent celle-ci :

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

On dit, en général, que la forme (a, b, c) contient la forme (a', b', c'), proprement si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est un entier positif et improprement si $\alpha\delta - \beta\gamma$ est un entier négatif. Si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, on dit que les formes (a, b, c), (a', b', c') sont proprement équivalentes, mais si

$\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, on dit qu'elles sont improprement équivalentes. Une condition de l'équivalence des formes (a, b, c), (a', b', c'), c'est donc l'égalité des nombres $b^2 - ac$, $b'^2 - a'c'$, c'est-à-dire des déterminants de ces mêmes formes.

Réduire une forme (a, b, c) c'est en trouver une autre qui lui soit proprement équivalente : (a', b', c') par exemple, et qui soit telle, que les coefficients a', b', c' tombent entre certaines limites dépendantes du déterminant $b^2 - ac = \mathrm{D}$. Lagrange et Legendre n'ont point distingué dans la réduction des formes, l'équivalence propre de l'équivalence impropre. Il est cependant très avantageux de le faire comme on le voit dans les *Recherches arithmétiques* de M. Gauss. On peut même dire que cette distinction est indispensable pour certaines recherches. Les règles exposées dans l'ouvrage de M. Gauss, pour les formes de déterminant négatif n° 171, et pour celles de déterminant positif non carré, n° 183, n'en font réellement qu'une seule. Comme la réduction des formes compose la plus grande partie du calcul nécessaire pour la résolution des équations du second degré, j'ai pensé qu'il était bon de présenter ici un algorithme pour opérer promptement ces réductions.

Soit la forme $ax^2 + 2bxy + a'y^2$ de déterminant $b^2 - aa' = \mathrm{D}$.

Pour D positif non carré, on représentera par m l'entier immédiatement au-dessous de $\sqrt{\mathrm{D}}$, et l'on fera la suite de divisions marquées au tableau suivant, en ayant soin que les restes r', r'', r''', ... toujours moindres que les diviseurs a', a'', a''', ... soient tous positifs.

Pour D négatif, le calcul est presque semblable, seulement il faut faire $m = 0$, et prendre les restes r', r'', r''',... toujours moindres que la moitié des diviseurs a', a'', a''', ... ou au plus égaux à la moitié de ces diviseurs. Ainsi ces restes sont tantôt positifs et tantôt négatifs.

Dividendes.	Diviseurs.	Quotients.	Restes.	Diff. des restes.
»	a,	»	$r = m - b$,	
$m + b = \Delta'$,	a',	h',	$r' = m - b'$,	$r' - r = d'$,
$m + b' = \Delta' - d' = \Delta''$,	$a'' = a - h'd'$,	h'',	$r'' = m - b''$,	$r'' - r' = d''$,
$m + b'' = \Delta'' - d'' = \Delta'''$,	$a''' = a' - h''d''$,	h''',	$r''' = m - b'''$,	$r''' - r'' = d'''$,
$m + b''' = \Delta''' - d''' = \Delta^{\text{IV}}$,	$a^{\text{IV}} = a'' - h'''d'''$,	h^{IV},	$r^{\text{IV}} = m - b^{\text{IV}}$,	$r^{\text{IV}} - r''' = d^{\text{IV}}$,
....	....	....	....	...

Les formes (a, b, a'), (a', b', a''), (a'', b'', a'''), $(a''', b''', a^{\text{IV}})$, ... données par ce calcul, sont toutes proprement équivalentes. On prend pour forme réduite la première forme $[a^{(n)}, b^{(n)}, a^{(n+1)}]$, où le coefficient extrême $a^{(n+1)}$ n'est pas moindre que le premier coefficient $a^{(n)}$, ces coefficients étant pris absolument.

Pour le déterminant négatif une réduite (A, B, C) est telle, que $2B$ est moindre que A et que C, et que $A <$ ou $= C$ est $< 2\sqrt{\frac{-D}{3}}$. On considère seulement les valeurs absolues.

Pour le déterminant positif B est toujours $< \sqrt{D}$, et A pris positivement entre $\sqrt{D} + B$ et $\sqrt{D} - B$. On peut rejeter la condition $A < C$. Le calcul donne plusieurs réduites.

Pour plus de détails et les démonstrations, voyez les *Recherches arithmétiques de* M. Gauss aux endroits cités.