JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la limite de $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$, m étant un entier positif qui croît indéfiniment

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__280_0>

Sur la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, *m étant un entier positif qui croît indéfiniment;*

Par J. LIOUVILLE.

La démonstration dont on fait ordinairement usage pour prouver que cette limite a pour valeur le nombre $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots$ n'est pas suffisamment rigoureuse; elle suppose en effet que pour $m = \infty$, le produit $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$ se réduit à l'unité, ce qui est vrai quand n est un nombre déterminé indépendant de m, mais ne l'est plus quand on a par exemple $n = m$ ou $n = m - 1$, etc. On corrigera ce défaut à l'aide des considérations suivantes qui peuvent être souvent utiles, et que M. Lejeune-Dirichlet a heureusement employées dans un de ses Mémoires. En représentant par n un nombre entier aussi grand qu'on voudra, mais indépendant de m, et par θ, η des nombres positifs < 1, on a

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(1 + \frac{\theta}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{\eta}{n}\right).$$

De cette dernière formule on conclut que

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(1+\frac{\zeta}{n}\right) + \varepsilon,$$

ζ étant, comme η, compris entre 0 et 1, tandis que ε désigne un nombre qui, pour toute valeur déterminée de n, converge vers 0 quand m augmente indéfiniment. La différence entre e et $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est donc exprimée par $\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\theta-\zeta}{n} - \varepsilon$, et l'on voit qu'elle peut être rendue plus petite que tout nombre donné en prenant d'abord n très grand, puis faisant croître m au-delà de toute limite. Donc, etc. Il est aisé de prouver que le même théorème a lieu quand m est négatif, fractionnaire ou irrationnel. Voyez sur ce point les ouvrages de M. Cauchy.