JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 276-279.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__276_0>

DÉMONSTRATION

DE

L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE L'ÉQUATION $x^7 + y^7 + z^7 = 0$

EN NOMBRES ENTIERS ;

PAR M. LEBESGUE [*],

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

La démonstration suivante revient au fond à celle de M. Lamé, dont elle n'est qu'une simplification.

Théorème I. « L'équation

$$p^2 = q^4 - 2^{2a}.3.7^4 q^2 r^2 + 2^{4a+4}.7^7 r^4,$$

» où les nombres p, q, r sont impairs et premiers entre eux, n'est pos-
» sible que pour $r = 0$; a est un nombre entier positif. »

Démonstration. La différence de deux carrés impairs étant divisible par 8, il est nécessaire que a soit plus grand que l'unité.

L'équation donnée peut se mettre sous la forme

$$[p + (q^2 - 2^{2a-1}.3.7^4 r^2)][p - (q^2 - 2^{2a-1}.3.7^4 r^2)] = 2^{4a-2}.7^7 r^4;$$

les deux facteurs du premier membre ne sauraient avoir pour diviseur premier commun ni 7, ni un diviseur de r, car alors p et q^2 auraient un

[*] Il ne sera pas inutile de transcrire ici un passage de la lettre que M. Lebesgue m'a adressée en m'envoyant cet article.

« Le rapport de M. Cauchy sur le Mémoire de M. Lamé, ce Mémoire lui-même et les
» recherches que j'avais faites sur le théorème de Fermat, m'ont conduit, pour $n = 7$, à
» une solution qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. Lamé. Je vous l'envoie
» de suite, car je desirerais qu'elle pût paraître prochainement, si vous n'y voyez pas
» d'inconvénient... La solution de M. Stern (Voir le Cahier de juin), très bonne en
» théorie, ne me semble pas praticable pour de grands nombres. Je compte vous en en-
» voyer une autre, etc., etc. » (J. L.)

même diviseur; de plus, des deux facteurs du premier membre l'un est divisible seulement par 2, et l'autre par 2^{4a-3}, car leur somme $2p$ est double d'un impair; il faudra donc poser $r = ts$, t premier à s, et faire

$$\left.\begin{array}{l} p+q^2-2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2=2s^4 \\ p-q^2+2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2=2^{4a-3}.7^7t^4 \end{array}\right| \begin{array}{l} =2.7^7.s^4 \\ \text{ou} \\ =2^{4a-3}.t^4 \end{array}\left| \begin{array}{l} =2^{4a-3}s^4 \\ \text{ou} \\ =2.7^7.t^4 \end{array}\right| \begin{array}{l} =2^{4a-3}.7^7.s^4 \\ \text{ou} \\ =2.t^4 \end{array}$$

Les trois derniers systèmes donnent $q^2-2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2$ de forme $4k+3$, ce qui est absurde; on ne peut donc admettre que le premier, d'où résulte l'équation

$$q^2 = s^4 + 2^{2a-1}.3.7^4 s^2 t^2 - 2^{4a-4}.7^7 t^4,$$

qui revient à

$$(s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4 t^2 \pm q)(s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4 t^2 \mp q) = 2^{4a+2}.7^7 t^4.$$

On démontrera comme plus haut que les deux facteurs du premier membre où les signes supérieurs doivent être pris ensemble, aussi bien que les inférieurs, n'ont que 2 pour plus grand commun diviseur. D'ailleurs le signe de q peut être choisi de sorte que le premier facteur soit divisible par 2 seulement, et l'autre par 2^{4a+1}, d'où, en supposant $t = uv$, u et v premiers entre eux, les deux décompositions

$$\left.\begin{array}{l} s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4 u^2 v^2 \pm q = 2u^4 \\ s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4 u^2 v^2 \mp q = 2^{4a+1}.7^7 v^4 \end{array}\right| \begin{array}{l} = 2.7^7.u^4 \\ \text{ou} \\ = 2^{4a+1}.v^4 \end{array}$$

dont la deuxième doit être rejetée, parce qu'elle donne à

$$s^2 + 2^{2a-2}.3.7^4 u^2 v^2$$

la forme $4k+3$. On admettra donc la première, d'où résulte

$$s^2 = u^4 - 2^{2(a-1)}.3.7^4 u^2 v^2 + 2^{4(a-1)+4}.7^7 v^4.$$

Or cette équation ne diffère de la première qu'en ce que a y est remplacé par $a-1$ et p, q, r, par s, u, v. Continuant ainsi, en remplaçant successivement a par $a-1$, $a-2, \ldots 3, 2$, on tombera sur l'équation

$$x^2 = y^4 - 2^2.3.7^4.y^2 z^2 - 2^8.7^7 z^4,$$

où x, y, z sont impairs, et qui est impossible comme on l'a déjà dit. On est donc obligé de supposer $r = 0$ dans l'équation de l'énoncé.

Théorème II. « L'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, où l'on suppose x, » y, z, entiers et premiers entre eux, n'est possible qu'en supposant » nulle l'une des inconnues, les deux autres étant ± 1 et ∓ 1. »

Démonstration. De l'équation donnée on tire

$$(x+y+z)^7 = 7(x+y)(x+z)(y+z)[(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2+xyz(x+y+z)],$$

qui devient identique quand on ajoute $x^7 + y^7 + z^7$ au deuxième membre. Posons, pour abréger,

$$x+y+z=s,\quad x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz=u,\quad (x+y)(x+z)(y+z)=v,\quad t=u^2+xyzs,$$

il en résultera $s^7 = 7vt$; de là les conséquences suivantes :

1°. Le nombre t est impair, de forme $4k+1$, car des trois nombres x, y, z, l'un est pair et les deux autres impairs. Tous les diviseurs premiers de t le sont de s, et par conséquent de u.

2°. Le nombre t est premier à x, y, z, car autrement x, y, z ne seraient pas premiers entre eux;

3°. Le nombre t est premier à v, car on a

$$v = s(xy + xz + yz) - xyz,$$

et si t n'était pas premier à v, il ne le serait pas à xyz;

4°. Le nombre t est une quatorzième puissance non divisible par 7.

En effet, l'équation $s^7 = 7v(u^2 + xyzs)$ montre que si θ est un diviseur premier de $t = u^2 + xyzs$, ce diviseur aura nécessairement le même exposant pair dans u^2 et dans s. Si donc u est divisible par θ^a, s le sera par θ^{2a} et t par θ^{14a}; à moins cependant qu'on ait $\theta = 7$: alors $7t$ serait divisible par 7^{14a}. Il résulte de là que t ou $7t$ est nécessairement une quatorzième puissance; or $7t$ qui est de forme $4k+3$, n'est pas même un carré : il faut donc poser $t = q^{14}$ et $u = qr$, puisqu'un diviseur θ^a dans u répond à θ^{14a} dans t. Les nombres q et r sont impairs ainsi que u; d'ailleurs ils sont premiers entre eux.

5°. Comme $7v$ est premier à t, $7v$ sera une septième puissance, et l'on aura $v = 7^6 . p^7$. Le nombre p est nécessairement pair.

6°. Nous pouvons donc poser les équations

$$(a)\qquad (x+y)(x+z)(y+z) = 7^6 . p^7,$$

$$(b)\qquad (x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2 + xyz(x+y+z) = q^{14},$$

$$(c)\qquad (x+y+z) = 7pq^2,$$

$$(d)\qquad x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz = qr.$$

Les équations (c) et (d) donnent

$$xy+xz+yz = 7^2 p^2 q^4 - qr,$$

d'où, en multipliant par l'équation (c), et tenant compte ensuite de l'équation (a),

$$xyz = 7pq^2(7^2 p^2 q^4 - qr) - 7^6 p^7;$$

alors l'équation (b) devient

$$q^{12} = r^2 + 7^2 . p^2 q^3 (7^2 . p^2 q^3 - r) - 7^7 p^8,$$

ou bien $\qquad (r - \frac{1}{2} . 7^2 p^2 q^3)^2 = q^{12} - 3(\frac{1}{2} 7^2 p^2 q^3)^2 + 7^7 p^8,$

qui, en posant $\qquad r - \frac{1}{2} . 7^2 p^2 q^3 = p_1, \quad q^3 = q_1, \quad p^2 = 2^{a+1} r_1,$

devient $\qquad p_1^2 = q_1^4 - 2^{2a} . 3 . 7^4 q_1^2 r_1^2 + 2^{4a+4} . 7^7 r_1^4,$

dans laquelle p_1, q_1 et r_1 sont premiers entre eux. Cette équation ne peut être satisfaite que par $r_1 = 0$; ainsi $p = 0$. On a donc à la fois $x+y+z=0$ et $(x+y)(x+z)(y+z)=0$, ou encore $xyz=0$, puisque

$$(x+y)(x+z)(y+z) = (x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz.$$

L'une des inconnues x, y, z est donc nulle.

Corollaire. L'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers positifs, sans être nuls, car autrement on pourrait supposer x, y, z premiers entre eux, et l'équation $x^7 + y^7 + (-z)^7 = 0$ serait satisfaite sans qu'une des inconnues fût nulle.