JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. STOUVENEL

Note sur une certaine suite de fractions ordinaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re série, tome 5 (1840), p. 265-275.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__265_0>

NOTE

SUR UNE CERTAINE SUITE DE FRACTIONS ORDINAIRES;

PAR M. V. STOUVENEL.

Le *Bulletin de la Société philomatique de Paris* (année 1816) contient l'observation suivante de M. Farey :

« Si l'on range par ordre de grandeur les fractions dont le dénominateur n'excède pas un nombre donné, et qu'ensuite on ajoute le numérateur et le dénominateur d'une de ces fractions, respectivement au numérateur et au dénominateur de la fraction qui la précède ou qui la suit de deux places, on aura la fraction intermédiaire, quoique non réduite peut-être à sa plus simple expression. »

Soit 7 le plus grand dénominateur donné; voici toutes les fractions possibles par ordre de grandeur :

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7}.$$

Prenons, dans cette *suite*, les deux fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{4}{5}$; on trouve $\frac{5+4}{7+5} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, fraction intermédiaire.

M. Cauchy ne tarda pas à prouver (*Bulletin philomatique*, 1816) que cette propriété n'est qu'un simple corollaire de ce théorème :

« Si dans la suite de fractions qui précède, on prend deux fractions consécutives, leurs dénominateurs seront premiers entre eux, et elles auront pour différence une nouvelle fraction dont le dénominateur sera l'unité. »

Ainsi, dans les trois fractions consécutives

$$\frac{a}{b},\quad \frac{a'}{b'},\quad \frac{a''}{b''}.$$

b' est premier avec b et b''; et l'on a

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'}, \qquad \frac{a''}{b''} - \frac{a'}{b'} = \frac{1}{b'b''};$$

d'où

$$a'b - ab' = 1, \qquad a''b' - a'b'' = 1,$$

et partant

$$\frac{a + a''}{b + b''} = \frac{a'}{b'},$$

expression analytique de la remarque de M. Farey.

Cette Note a pour objet de démontrer quelques autres propriétés qui appartiennent aux fractions dont il s'agit, et d'indiquer un moyen simple de les calculer par ordre de grandeur.

I.

J'appelle *complémentaires*, deux fractions irréductibles dont la somme est égale à l'unité.

De là suit que deux fractions complémentaires ont le même dénominateur, et que la somme de leurs numérateurs est égale à ce dénominateur commun. On peut donc, en faisant $b - a = c$, les écrire sous la forme

$$\frac{a}{b}, \qquad \frac{c}{b}.$$

Lemme. « Si l'on développe deux fractions complémentaires en *fractions continues*, les *réduites* de même rang par rapport aux extrêmes » seront complémentaires deux à deux. »

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$, la première $< \frac{1}{2}$, la seconde $> \frac{1}{2}$; on a généralement

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cfrac{1}{p''' + \text{etc.}}}}}$$

Dans ce développement, p est toujours > 1, puisque $\frac{a}{b}$ est $< \frac{1}{2}$.

Pour $\frac{c}{b}$, on a d'abord

$$\frac{c}{b} = \frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{b-a}};$$

d'ailleurs, si $\frac{a}{b} = \cfrac{1}{p + \cfrac{R}{a}}$, il est clair que $\frac{a}{b-a} = \cfrac{1}{(p-1) + \cfrac{R}{a}}$, R étant le même reste de part et d'autre; donc

$$(2) \qquad \frac{c}{b} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(p-1) + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cfrac{1}{p''' + \text{etc.}}}}}}$$

Cette fraction continue donne une réduite de plus que la fraction (1). Voici les deux séries de ces réduites :

$$(3) \qquad \frac{1}{p},\quad \frac{p'}{pp'+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a}{b},$$

$$(4) \qquad \frac{1}{1},\quad \frac{p-1}{p},\quad \frac{pp'+1-p'}{pp'+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{c}{b}.$$

Négligeant la première réduite $\frac{1}{1}$ du développement de $\frac{c}{b}$, on voit que les deux suivantes sont complémentaires deux à deux, et de plus également éloignées des extrêmes $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$. Or cette loi s'appliquera à toutes les autres, si l'on prouve qu'étant vraie pour deux réduites consécutives, elle est aussi vraie pour la troisième.

Prenons dans la série (3) deux réduites quelconques $\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n'}$, et supposons que les réduites correspondantes dans la série (4) soient

$$\frac{n-m}{n}, \qquad \frac{n'-m'}{n'},$$

la réduite qui suit $\frac{m'}{n'}$ est

$$\frac{m'q+m}{n'q+n},$$

celle qui vient après $\frac{n'-m'}{n'}$ est

$$\frac{(n'-m')q+n-m}{n'q+n};$$

le quotient q a été pris le même de part et d'autre, supposition admissible, à partir du quotient p'.

Mais les deux réduites qui précèdent sont complémentaires; donc le lemme est démontré.

Scolie. Quand $\frac{m}{h}$ est $< \frac{a}{b}$, alors $\frac{n-m}{n}$ est $> \frac{b-a}{b} = \frac{c}{b}$, et réciproquement. Donc les réduites complémentaires, en y comprenant $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$, sont, en allant de gauche à droite, l'une de rang pair, l'autre de rang impair; ce qui du reste est évident si l'on fait commencer par $\frac{0}{1}$ les deux séries de *convergentes* (3) et (4).

II.

Considérons maintenant la suite montante des fractions ordinaires (A); K étant le plus grand dénominateur donné, elle peut s'écrire en général

$$\frac{1}{K},\quad \frac{1}{K-1},\quad \frac{1}{K-2},\ldots\ldots\ \frac{K-1}{K}.$$

B) *Théorème.* « Si, dans cette *suite*, deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont com-
» plémentaires, il en sera de même pour les deux fractions dont l'une
» $\frac{x}{y}$ précède immédiatement $\frac{a}{b}$, et dont l'autre $\frac{x'}{y'}$ suit immédiatement $\frac{c}{b}$. »

En vertu du théorème de M. Cauchy, les valeurs de $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont données par les équations

$$(5)\qquad ay - bx = +1,$$
$$(6)\qquad bx' - cy' = +1.$$

Appliquons la méthode des fractions continues à la résolution de ces deux indéterminées.

D'après le *lemme* qui vient d'être démontré, les deux réduites qui précèdent immédiatement $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont complémentaires, et peuvent s'écrire

$$\frac{l}{n},\quad \frac{m}{n},\qquad \text{faisant } n - l = m;$$

on en déduit

$$(7)\qquad an - bl = \pm 1,\qquad cn - bm = \mp 1:$$

les seconds membres sont de signes contraires, parce que, d'après le scolie précédent, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont de rangs contraires.

Supposons $\frac{a}{b}$ de rang pair, il faut prendre

$$an - bl = +1.$$

Comparant avec l'équation (5), on voit que celle-ci est satisfaite au moyen des valeurs

$$x = l,\qquad y = n.$$

On obtient ainsi cette expression générale, qui comprend la valeur particulière de $\frac{x}{y}$,

$$(8)\qquad \frac{X}{Y} = \frac{l + az}{n + bz}.$$

$\frac{l}{n}$ étant $< \frac{a}{b}$, quand z nombre entier augmente positivement, $\frac{X}{Y}$ s'approche de $\frac{a}{b}$ par une série de valeurs croissantes. Au contraire, lorsque z croît négativement, $\frac{X}{Y}$ reçoit des valeurs décroissantes, toutes plus grandes que $\frac{a}{b}$. Donc on obtiendra $\frac{x}{y}$ immédiatement $< \frac{a}{b}$, en prenant parmi les z positifs celui qui donne pour $n + bz$ le plus grand nombre entier contenu dans K.

Puisqu'on a supposé $\frac{a}{b}$ de rang pair, $\frac{c}{b}$ est de rang impair, et par conséquent,

$$cn - bm = -1,$$

ou

$$bm - cn = +1.$$

Comparant avec l'équation (6), on voit que cette dernière est vérifiée par les valeurs

$$x' = m, \qquad y' = n;$$

d'où cette expression générale comprenant $\frac{x'}{y'}$:

$$(9) \qquad \frac{X'}{Y'} = \frac{m + cz}{n + bz}.$$

$\frac{m}{n}$ étant $> \frac{c}{b}$, lorsque z augmente positivement, $\frac{X'}{Y'}$ s'approche de $\frac{c}{b}$ par une série de valeurs décroissantes, tandis que z croissant négativement, fournit des fractions croissantes toutes plus petites que $\frac{c}{b}$. Donc, on obtiendra $\frac{x'}{y'}$ qui est immédiatement $> \frac{c}{b}$, en prenant parmi les z positifs celui qui donne pour $n + bz$ le plus grand nombre entier contenu dans K.

De là suit que les dénominateurs de $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont égaux, et déterminés par la même valeur de z. Dès lors la somme $x + x'$ des numérateurs est égale à ce dénominateur commun, et partant $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont des fractions complémentaires. Un raisonnement semblable prouverait que la même chose a lieu, si l'on supposait $\frac{a}{b}$ de rang impair.

Donc le théorème (B) est démontré.

La fraction $\frac{1}{2}$ fait partie de la *suite* montante (A); cherchons les deux fractions adjacentes à $\frac{1}{2}$.

(C) *Théorème.* « Ces deux fractions sont complémentaires, et leur

» dénominateur commun est le plus grand nombre impair contenu
» dans K. »

En effet, la plus petite $\frac{x}{y}$ de ces deux fractions est donnée par l'équation

$$y - 2x = 1,$$

à laquelle on satisfait en faisant

$$x = 0, \qquad y = 1;$$

d'où l'on tire cette expression générale qui comprend $\frac{x}{y}$:

$$\frac{z}{1 + 2z} = \frac{1}{2 + \frac{1}{z}}.$$

Quand z croissant est positif, le dénominateur $1 + 2z$ est impair, et la fraction s'approche de $\frac{1}{2}$ par une suite de valeurs croissantes. Donc $\frac{x}{y}$ immédiatement $< \frac{1}{2}$ a pour dénominateur le plus grand nombre impair contenu dans K, et déterminé par z positif.

La fraction $\frac{x'}{y'}$ immédiatement $> \frac{1}{2}$ est donnée par l'équation

$$2x' - y' = 1,$$

à laquelle on satisfait en faisant

$$x' = 0, \qquad y' = -1;$$

d'où l'on tire l'expression générale

$$\frac{z}{2z - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{z}}.$$

Quand z positif est croissant, le dénominateur $2z - 1$ est impair, et la fraction s'approche de $\frac{1}{2}$ par une suite de valeurs décroissantes. Donc $\frac{x'}{y'}$

immédiatement $> \frac{1}{2}$ a pour dénominateur le plus grand nombre impair contenu dans K, et déterminé par z positif.

Ainsi, les deux fractions adjacentes à $\frac{1}{2}$ ont chacune pour dénominateur le plus grand nombre impair contenu dans K. On en conclut les égalités suivantes :

$$y = y', \qquad y - 2x = 2x' - y,$$
$$x + x' = y, \qquad x' - x = 1,$$

ce qui fait voir que $\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ sont complémentaires, et, de plus, que la différence de leurs numérateurs est l'unité.

Corollaire 1. Dans la suite montante (A), les fractions de même rang à gauche et à droite de $\frac{1}{2}$ sont complémentaires; car celles du premier rang le sont, d'après le théorème (C). Donc, en vertu du théorème (B), toutes les autres de même rang le sont aussi, en y comprenant les extrêmes $\frac{1}{K}$ et $\frac{K-1}{K}$.

2°. La fraction $\frac{1}{2}$ est le terme du milieu de la suite (A).

3°. Si l'on prend deux fractions à égale distance de $\frac{1}{2}$, et qu'on ajoute respectivement les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions, la fraction résultante sera $\frac{1}{2}$.

4°. Il n'est pas besoin de calculer directement toutes les fractions (A). Il suffit de calculer depuis $\frac{1}{K}$ jusqu'à $\frac{1}{2}$ ou depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{K-1}{K}$, le reste se trouve par de simples soustractions.

III.

Il s'agit maintenant d'avoir un moyen facile de calculer les fractions (A) par ordre de grandeur; car il serait pénible, pour obtenir chacune d'elles, de résoudre une équation indéterminée.

Prenons les trois fractions consécutives et croissantes

$$\frac{a}{b},\ \frac{a'}{b'},\ \frac{x}{y}.$$

La remarque de M. Farey donne

$$a + x = a'z, \qquad b + y = b'z,$$

z est un facteur entier qu'il faut déterminer. On tire de là

$$\frac{x}{y} = \frac{a'z - a}{b'z - b}. \tag{10}$$

Plus z est grand, plus la fraction (10) s'approche de $\frac{a'}{b'}$ par une suite de valeurs décroissantes. Or, la valeur particulière de $\frac{x}{y}$ que nous cherchons est assujétie à cette double condition : 1° d'être immédiatement $> \frac{a'}{b'}$; 2° d'avoir pour dénominateur un nombre $<$ ou $=$ K. Donc on obtiendra cette valeur, en prenant z tel que le dénominateur $b'z - b$ soit le plus grand nombre entier contenu dans K.

Posons donc

$$b'z - b = \mathrm{K};$$

d'où

$$z = \frac{\mathrm{K} + b}{b'}.$$

Le facteur z qui est nécessairement entier, se trouve ainsi déterminé par la partie entière du quotient

$$\frac{\mathrm{K} + b}{b'}. \tag{11}$$

Appliquons ce qui précède à la suite $\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \ldots$ où $\mathrm{K} = 7$; et cherchons la fraction qui doit suivre $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$. On détermine d'abord z par la formule (11), qui donne

$$\frac{7 + 5}{3} = 4.$$

Ensuite on calcule la fraction cherchée au moyen de la formule (10) qui donne

$$\frac{2.4-3}{3.4-5}=\frac{5}{7}.$$

Scolie. On peut abréger au moyen de l'observation suivante.

Supposons H impair; les premiers termes de la série en question sont de la forme

$$\frac{1}{K},\ \frac{1}{K-1},\ \frac{1}{K-2},\ \frac{1}{K-3},\ldots\ldots$$

jusqu'au terme $\frac{2}{K}$ qui vient rompre ce système.

Cherchons la place de $\frac{2}{K}$. Pour cela considérons les fractions

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(K+1)},\qquad \frac{1}{\frac{1}{2}(K-1)},$$

$K+1$ et $K-1$ sont des nombres pairs, et les dénominateurs $\frac{1}{2}(K+1)$, $\frac{1}{2}(K-1)$, ne diffèrent que d'une unité.

Les deux fractions qui précèdent peuvent s'écrire

$$\frac{2}{K+1},\qquad \frac{2}{K-1}.$$

La fraction $\frac{2}{K}$ est comprise entre ces dernières, elle vient donc après

$$\frac{2}{K+1}=\frac{1}{\frac{1}{2}(K+1)}.$$

Ainsi, pour former la *suite* montante de M. Farey, écrivez d'abord

$$\frac{1}{K},\quad \frac{1}{K-1},\quad \frac{1}{K-2},\quad \frac{1}{K-3},\ldots\ldots$$

jusqu'à ce que vous arriviez au dénominateur

$$\tfrac{1}{2}(K+1).$$

La fraction suivante est $\frac{2}{K}$; puis servez-vous des formules (10) et (11).

Si K était pair, il faudrait s'arrêter à $\frac{1}{\frac{1}{2}K}$. La fraction suivante est $\frac{2}{K-1}$.

Exemple. Soit $K = 17$, la suite se développe ainsi

$$\frac{1}{17},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{15},\ \frac{1}{14},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{17}\ldots\ldots;$$

$\frac{2}{17}$ vient après $\frac{1}{9}$, où $9 = \frac{1}{2}(17+1)$.

Soit encore $K = 14$, on obtient

$$\frac{1}{14},\ \frac{1}{13},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{13}\ldots\ldots;$$

$\frac{2}{13}$, c'est-à-dire $\frac{2}{K-1}$, vient après $\frac{1}{7}$, où $7 = \frac{1}{2}.14$.

IV.

Les fractions (A) ont plusieurs analogies avec les réduites, et les convergentes intermédiaires qu'on peut insérer entre les réduites. Voici deux analogies fort simples.

Prenons trois réduites consécutives

$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{h}{g};$$

on sait que $ad - bc = \pm 1$ et $cg - dh = \mp 1$;

d'où
$$ad - bc = dh - cg,$$

et
$$\frac{c}{d} = \frac{h-a}{g-b}.$$

Ainsi, la différence des numérateurs des réduites extrêmes divisée par celle de leurs dénominateurs donne la réduite intermédiaire.

En second lieu, les convergentes intermédiaires entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{h}{g}$ sont

$$\frac{a}{b},\quad \frac{a+c}{b+d},\quad \frac{a+2c}{b+2d},\quad \frac{a+3c}{b+3d},\ldots\ldots$$

et l'on retrouve ici la propriété observée par M. Farey.
