

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STERN

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 5 (1840), p. 216-219.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5_216_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

EXTRAIT

D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. STERN.

« Je viens de lire dans votre Journal (février 1840) le beau Mémoire de M. Lebesgue, à la fin duquel il propose une question concernant la détermination du signe dans la formule

$$\frac{1}{\sqrt{p}} = \pm \pi \cotang a \frac{2\pi}{p},$$

que j'ai donnée dans le Journal de M. Crellé (le double signe y a été omis par inadvertance). Je vais y répondre en peu de mots.

» On sait que les racines de l'équation

$$(1) \quad x^{p-1} - \frac{1}{4} p x^{p-3} + \frac{1}{16} p \frac{(p-3)}{1.2} x^{p-5} \dots \pm \frac{1}{2^{p-1}} p = 0$$

$$\text{sont} \quad \sin \frac{2\pi}{p}, \quad \sin 2 \frac{2\pi}{p}, \dots \sin (p-1) \frac{2\pi}{p}.$$

En faisant $p = 2m + 1$ et $x^2 = y$, on réduit cette équation à la suivante

$$(2) \quad y^m - \frac{1}{4} p y^{m-1} \dots \pm \frac{1}{2^{p-1}} p = 0.$$

Si p est un nombre premier de la forme $4n + 3$, et qu'on désigne par $a_1, a_2, \dots a_m$ les résidus quadratiques, les racines de l'équation (2) seront

$$\sin^2 a_1 \frac{2\pi}{p}, \quad \sin^2 a_2 \frac{2\pi}{p}, \dots \sin^2 a_m \frac{2\pi}{p},$$

$$\text{et l'on aura} \quad \sin^2 a_1 \frac{2\pi}{p} \sin^2 a_2 \frac{2\pi}{p} \dots \sin^2 a_m \frac{2\pi}{p} = \frac{2^{p-1}}{p},$$

ou

$$(3) \quad \pi \sin a \frac{2\pi}{p} = \pm \frac{\sqrt{p}}{2^m}.$$

Il est évident qu'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que le nombre des résidus qui sont plus grands que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair. D'ailleurs on sait que dans la congruence

$$1 \cdot 2 \dots \frac{p-1}{2} \equiv \pm 1 \pmod{p},$$

la détermination du signe dépend de la même condition; et comme M. Jacobi a montré (Journal de M. Crelle, tome IX, page 192) qu'on a toujours

$$1 \cdot 2 \dots \frac{p-1}{2} \equiv (-1)^N \pmod{p},$$

N désignant le nombre des diviseurs quadratiques de la forme $t^2 + pu^2$, on aura

$$(4) \quad \prod \sin a \frac{2\pi}{p} = (-1)^N \frac{\sqrt{p}}{2^m}.$$

On sait aussi que p étant un nombre premier de la forme $4n + 3$, les expressions

$$\cos a_1 \frac{2\pi}{p}, \quad \cos a_2 \frac{2\pi}{p}, \dots \cos a_m \frac{2\pi}{p}$$

sont les racines de l'équation

$$x^m + \frac{1}{2}x^{m-1} - \frac{1}{2^2}(m-1)x^{m-2} \dots \mp \frac{1}{2^m} = 0,$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur, selon qu'on a

$$p = 8k + 7, \quad p = 8k + 3.$$

On aura donc

$$(5) \quad \prod \cos a \frac{2\pi}{p} = \frac{1}{2^m}$$

pour le cas $p = 8k + 7$,

et

$$(6) \quad \prod \cos a \frac{2\pi}{p} = -\frac{1}{2^m}$$

pour le cas $p = 8k + 3$.

En combinant les équations (5) et (6) avec l'équation (4), on trouve

$$(7) \quad \pi \cotang a \frac{2\pi}{p} = (-1)^N \frac{1}{\sqrt{p}}$$

pour le cas $p = 8k + 7$,

et

$$(8) \quad \pi \cotang a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{N+1} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

pour le cas $p = 8k + 3$. On voit donc que le signe est tout-a-fait déterminé.

» On a aussi

$$\pi \tang a \frac{2\pi}{p} = (-1)^N \sqrt{p},$$

$$\pi \tang a \frac{2\pi}{p} = (-1)^{N+1} \sqrt{p},$$

selon que $p = 8k + 7$ ou $p = 8k + 3$.

» Je profite de cette occasion pour faire une remarque sur la détermination du signe dans la congruence

$$2b \equiv \pm r^2 \pmod{p},$$

que M. Gauss a donnée dans son premier Mémoire sur les résidus biquadratiques (p. 31). Comme la détermination *générale* de ce signe n'a pas réussi à l'illustre géomètre, elle semble appartenir aux plus profonds mystères de la théorie des nombres. Il est d'autant plus remarquable, que pour le cas $p = 8n + 5$, on puisse donner une formule qui détermine en même temps la valeur et le signe de b ; car alors on a

$$(9) \quad 2^n (1 \cdot 2 \dots n) \equiv 2 \cdot 4 \dots 2n,$$

$$(10) \quad 2^{n+1} (4n+3 \cdot 4n+4 \dots 5n+3) \equiv 1 \cdot 3 \dots 2n+1 \pmod{p},$$

et $4n+3 \equiv -(4n+2)$, $4n+4 \equiv -(4n+1)$, ... $5n+3 \equiv -(3n+2)$.

Il suit donc

$$(11) \quad 2^{n+1} (4n+2 \cdot 4n+1 \dots 3n+2) \equiv (-1)^{n+1} (1 \cdot 3 \dots 2n+1),$$

et en multipliant cette formule par la formule (9), on a

$$2^{2n+1} (4n + 2 \dots 3n + 2) \equiv (-1)^{n+1} (n + 1 \dots 2n + 1),$$

et

$$(12) \quad 2^{2n+1} \equiv (-1)^{n+1} \frac{n+1 \cdot n+2 \dots 2n+1}{3n+2 \dots 4n+2}.$$

Mais M. Gauss a démontré, dans le Mémoire cité, que g étant une racine primitive, le nombre 2 est congru à un des nombres g, g^3, \dots, g^{p-2} ou à un des nombres g^3, g^7, \dots, g^{p-2} , selon qu'on a $b = 8m + 2$ ou $b = 8m + 6$. On aura donc $2^{2n+1} \equiv g^{2n+1}$, selon que b est contenu dans la première forme ou dans la seconde. Et comme on a

$$b \equiv g^{2n+1} \cdot a \quad (\text{Ib.}, \text{ page } 27),$$

la valeur de a étant déterminée par la congruence

$$(13) \quad 2a \equiv \frac{4n+2 \dots 2n+2}{1 \dots 2n+1} \pmod{p},$$

il en suit $b \equiv 2^{2n+1} \cdot a$ ou $-b \equiv 2^{2n+1} \cdot a$, selon qu'on a $b = 8m + 2$ ou $b = 8m + 6$, c'est-à-dire qu'il faut toujours fixer le signe de manière qu'on ait

$$b \equiv 2 \pmod{8}.$$

En combinant les formules (12) et (13), on trouve

$$\pm 2b \equiv (-1)^{n+1} \frac{3n+1 \dots 2n+2}{1 \dots n},$$

et le signe est déterminé par la congruence

$$b \equiv 2, \pmod{8}.$$

« J'ai déjà consigné plusieurs des remarques précédentes dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences au courant de l'année 1837, mais sur lequel on n'a pas encore fait de rapport. »

(20 mai 1840.)