JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAUCHY

Rapport sur le Mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 211-215.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__211_0>

Rapport sur le Mémoire précédent; par M. A. Cauchy.

Extrait des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences, tome IX, p. 359.

« L'Académie nous a chargés, M. Liouville et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire de M. Lamé sur le dernier théorème de Fermat.

» On sait que Fermat, l'un des plus beaux génies qui aient illustré la France, a donné des énoncés de plusieurs théorèmes, parmi lesquels il en est deux dont la démonstration a été pendant long-temps recherchée avec ardeur par divers géomètres. De ces théorèmes il n'en reste plus qu'un seul qui ne soit pas aujourd'hui complétement démontré : c'est le théorème relatif aux puissances des nombres entiers, et suivant lequel une puissance d'un degré n supérieur au second, ne peut résulter de l'addition de deux puissances du même degré. On sait toutefois que le théorème, une fois démontré pour une valeur particulière de n, l'est en même temps pour tous les multiples de cette valeur, et que, d'après les principes établis par Fermat lui-même, ce théorème se démontre assez facilement pour $n=4$. De plus, Euler et M. Legendre sont parvenus à le démontrer encore pour les valeurs 3 et 5 de l'exposant n. Mais leurs démonstrations sont fondées sur la théorie des formes quadratiques des nombres premiers; et les difficultés que M. Legendre a eu à surmonter, pour le cas de $n=5$, laissaient peu d'espoir d'appliquer avec succès les mêmes principes aux cas où n acquiert des valeurs plus considérables. Toutefois, cette considération n'a pas empêché M. Lejeune-Dirichlet, dont les recherches sur la théorie des nombres avaient été utiles à M. Legendre, de s'occuper de nouveau du dernier théorème de Fermat; et à l'aide d'un artifice particulier de calcul, il est parvenu à le démontrer pour le cas où l'on suppose $n=14$. M. Lamé a considéré à son tour un cas qui renferme le précédent, savoir, le cas où l'on suppose $n=7$; et les savants apprendront avec plaisir qu'il est parvenu effectivement au but qu'il s'était proposé d'atteindre.

» Pour démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers une équation de la forme

$$x^7+y^7+z^7=0,$$

où z est supposé négatif, M. Lamé n'a point recours à la théorie des formes quadratiques des nombres premiers. Après avoir prouvé comme à l'ordinaire que

$$x,\quad y,\quad z,$$

peuvent être supposés premiers entre eux, il démontre un lemme, digne de remarque, savoir, que le rapport entre la somme

$$x+y+z$$

des trois inconnues et la racine 7^e du produit des trois sommes

$$x+y,\quad x+z,\quad y+z,$$

ou de ce produit, multiplié par 7, est un carré parfait; puis à l'aide de ce lemme il prouve facilement qu'il est impossible de supposer les trois inconnues non divisibles par 7, ce que l'on savait déjà. Enfin, en supposant l'une des inconnues divisible par 7, et s'appuyant sur le lemme dont il s'agit, il remplace l'équation proposée, du 7^e degré, par une autre équation dont le premier membre est du 4^e degré, le second membre étant du 8^e, et qui peut être présentée sous la forme

$$z^4=x^8-3x^4y^4+\frac{16}{7}y^8;$$

puis il démontre l'impossibilité de résoudre cette dernière équation, à l'aide d'une suite d'opérations semblables à celle que fournit la résolution d'une équation de la forme

$$x^2 - y^2 = A.$$

» En lisant avec soin le Mémoire de M. Lamé, nous nous sommes demandé, 1° si le lemme dont il a fait usage se trouve compris dans quelque autre proposition plus générale relative à une valeur quelconque de n; 2° s'il ne serait pas possible d'abréger encore la démonstration donnée par M. Lamé pour le cas de $n = 7$. Nous avons reconnu qu'effectivement le lemme de M. Lamé est une conséquence nécessaire d'un théorème d'analyse qui nous semble assez curieux pour mériter d'être indiqué dans ce rapport. Voici l'énoncé de ce nouveau théorème.

» Si l'on retranche la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de deux inconnues x, y de la puissance $n^{\text{ième}}$ de leur somme

$$x + y,$$

le reste sera divisible algébriquement, non-seulement par le produit

$$nxy(x + y),$$

comme on le reconnaît aisément, mais encore, pour des valeurs de n supérieures à 3, par le trinome

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{x^3 - y^3}{x - y},$$

et même par le carré de ce trinome, lorsque n divisé par 6 donnera pour reste l'unité. En appliquant ce théorème aux cas où l'on a

$$n = 3, \quad n = 5, \quad n = 7,$$

on obtient successivement les formules

$$\begin{aligned}(x + y)^3 - x^3 - y^3 &= 3xy(x + y),\\ (x + y)^5 - x^5 - y^5 &= 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2),\\ (x + y)^7 - x^7 - y^7 &= 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2,\end{aligned}$$

dont la dernière conduit sans peine au lemme de M. Lamé.

» Quant à la seconde question, nous avons reconnu qu'on abrège la démonstration de M. Lamé quand on commence par établir l'impossibilité de résoudre l'équation

$$z^2 = x^4 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{1}{7}y^4,$$

en prenant pour x, y, z, des nombres premiers entre eux, et pour y un carré pair. Au reste, la méthode par laquelle on y parvient ne diffère pas au fond de celle qui sert à démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$z^2 = x^4 + y^4,$$

et servirait pareillement à établir l'impossibilité de résoudre en nombres entiers une multitude d'équations de la forme

$$z^2 = x^4 - Ax^2y^2 + By^4.$$

« Nous ne terminerons pas ce rapport sans rappeler qu'à une époque antérieure, M. Lamé s'était déjà occupé de la théorie des nombres. Au moment où l'Académie proposa pour sujet de prix le dernier théorème de Fermat, elle reçut un Mémoire qui ne résolvait pas, il est vrai, la question proposée; mais qui renfermait du moins des théorèmes curieux sur l'impossibilité de la résoudre sans que certains nombres, égaux, par exemple, à l'unité augmentée du double ou du quadruple de l'exposant, fussent diviseurs de l'une des inconnues. L'un de nous, nommé Commissaire à cette époque avec M. Legendre, se rappelle encore avoir lu ces théorèmes dans le Mémoire envoyé au concours. Si l'auteur, que nous avons su depuis être M. Lamé, ne parvint pas alors à remplir entièrement le vœu de l'Académie, son travail n'était pourtant pas sans mérite, et son nouveau Mémoire prouve qu'il est capable de lutter avec avantage contre les difficultés qui dans cette matière n'ont pu être jusqu'à présent complétement surmontées par les géomètres.

» En résumé, vos Commissaires pensent que le Mémoire de M. Lamé est digne de l'approbation de l'Académie, et d'être inséré dans le recueil des *Savants étrangers*. »

Les conclusions de ce rapport sont adoptées.

« *Post-scriptum*. On démontre aisément le nouveau théorème énoncé dans ce rapport de la manière suivante :

» Soient $$1,\quad \alpha,\quad \beta.$$

les trois racines de l'équation $$x^3 = 1.$$

On aura, non-seulement $$1 + \alpha + \beta = 0,$$

mais encore, en supposant n non divisible par 3,

(1) $$1 + \alpha^n + \beta^n = 0,$$

et de plus $$x^2 + xy + y^2 = (x - \alpha y)(x - \beta y).$$

» Cela posé, je dis que, si l'on prend pour n un nombre premier impair supérieur à 3, l'expression

(2) $$(x - y)^n - x^n - y^n$$

sera divisible par le trinome $$x^2 + xy + y^2,$$

et même par le carré de ce trinome, lorsque n divisé par 3 donnera pour reste l'unité. Effectivement, pour établir cette proposition, il suffira de faire voir qu'en supposant

$$x = \alpha y \quad \text{ou} \quad x = 6y,$$

on réduit à zéro l'expression (2), et de plus sa dérivée relative à x, savoir

$$(3) \qquad n[(x+y)^{n-1} - x^{n-1}],$$

lorsque n divisé par 6 donnera 1 pour reste. Or, lorsqu'on suppose, par exemple, $x = \alpha y$, les expressions (2) et (3) deviennent proportionnelles aux suivantes

$$(1+\alpha)^n - 1 - \alpha^n = -1 - \alpha^n + (-6)^n,$$
$$n[(1+\alpha)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = n[(-6)^{n-1} - \alpha^{n-1}],$$

et il est clair qu'elles s'évanouissent, la première en vertu de la formule (1), pour les valeurs impaires de n non divisibles par 3; la seconde en vertu des formules

$$\alpha^3 = 1, \quad 6^3 = 1,$$

pour les valeurs impaires de n, qui, divisées par 3, donnent 1 pour reste.