JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Addition à la note sur l'irrationnalité du nombre e

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 193-194.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__193_0>

ADDITION

A LA

NOTE SUR L'IRRATIONNALITÉ DU NOMBRE e;

PAR J. LIOUVILLE.

On peut étendre au carré du nombre e le théorème que nous avons démontré dans le dernier cahier de ce Journal; en d'autres termes, on peut prouver que l'équation $ae^2 + be^{-2} = c$ est impossible, a désignant un entier positif, et b, c des entiers positifs, nuls ou négatifs.

En effet, représentons avec Legendre par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière contenue dans un nombre positif quelconque x: la somme

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{4}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{m}{8}\right) + \ldots$$

indiquera combien de fois le facteur 2 entre dans le produit $1.2.3\ldots m$; cette somme est évidemment plus petite que $\frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m}{8} + \ldots$, c'est-à-dire plus petite que m; de plus, elle a pour valeur $m - 1$ ou $m - 2$ respectivement, lorsque m est une puissance exacte de 2 ou une telle puissance augmentée d'une unité; on voit par là que la fraction irréductible équivalente à $\frac{2^m}{1.2.3\ldots m}$ est de la forme $\frac{2^{\alpha_m}}{p_m}$, α_m étant un exposant essentiellement positif qui devient égal à 1 quand on a $m = 2^i$ et égal à 2 quand $m = 2^i + 1$; ajoutons que si n est un entier $> m$, p_n sera divisible par p_m.

Cela posé, j'observe que, d'après une formule connue, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\left(1 + \frac{xe^{\theta x}}{n+1}\right),$$

θ désignant un certain nombre compris entre 0 et 1. Soient β, γ les valeurs de $\frac{e^{\theta x}}{n+1}$ relatives à $x = 2$ et $x = -2$, lesquelles deviendront plus petites que tout nombre donné, en prenant n suffisamment grand. En faisant, comme ci-dessus,

$$\frac{2^m}{1.2.3\ldots m} = \frac{2^{\alpha_m}}{p_m},$$

nous obtiendrons

$$e^2 = 1 + \ldots + \frac{2^{\alpha_m}}{p_m} \ldots\ldots + \frac{2^{\alpha_n}}{p_n}(1 + 2\beta),$$

$$e^{-2} = 1 - \ldots \pm \frac{2^{\alpha_m}}{p_m} \ldots\ldots \pm \frac{2^{\alpha_n}}{p_n}(1 - 2\gamma).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $ae^2 + be^{-2} = c$, puis multipliant les deux membres par p_n, on trouve ensuite, sans difficulté,

$$a.2^{\alpha_n}.2\beta \mp b.2^{\alpha_n}.2\gamma = \mu,$$

μ étant un entier. Or cette équation est absurde; en effet on pourra rendre de même signe les deux facteurs a et $\mp b$; il suffira, par exemple, de prendre $n = 2^i$ si b est < 0, et $n = 2^i + 1$ si b est > 0; d'ailleurs, dans la première de ces deux hypothèses, on aura $\alpha_n = 1$, et dans la seconde, $\alpha_n = 2$; dès lors, en donnant à i une valeur très considérable, on voit que la somme $a.2^{\alpha_n}.2\beta \mp b.2^{\alpha_n}.2\gamma$ sera essentiellement positive et très petite, de sorte qu'elle ne pourra pas être égale à un entier μ. Donc, etc.