JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. DELAUNAY

Observations sur un mémoire de M. Paul Breton

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 189-191.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__189_0>

OBSERVATIONS

SUR UN MÉMOIRE DE M. PAUL BRETON;

PAR M. CH. DELAUNAY,
Répétiteur à l'École Polytechnique

M. Breton vient de publier dans ce Journal un Mémoire sur les forces centrifuges développées dans le mouvement des corps qui roulent; les résultats auxquels il est arrivé m'ont paru tellement en opposition avec ce qu'on démontre journellement dans les cours de mécanique, que j'ai voulu m'assurer s'ils étaient bien exacts; j'ai reconnu, en effet, que la théorie exposée dans ce Mémoire est complétement fausse, et c'est ce que je vais tâcher d'expliquer dans cette Note.

Considérons une roue bien centrée, douée d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe, et supposons d'abord que l'axe ne se déplace pas. En vertu de ce mouvement, un point quelconque m de la roue, situé à une distance r de l'axe, décrit d'un mouvement uniforme un cercle de rayon r; la direction de la vitesse constante v de ce point change à chaque instant, et ce changement de direction est dû aux liaisons qui existent entre le point m et les autres points du système; la force qui le produit est $\frac{mv^2}{r}$, et par conséquent le point m réagit sur le système, comme le ferait une force égale à $\frac{mv^2}{r}$, et de sens contraire à la précédente. C'est ainsi qu'on est conduit à la considération des forces centrifuges qui se développent dans le mouvement de rotation d'un corps autour d'une droite, et dans le cas actuel, puisque nous supposons la roue bien centrée, nous trouverions qu'il y a équilibre entre toutes les forces centrifuges, seules forces qui résultent du mouvement de la roue.

Si maintenant nous supposons que l'axe de la roue ait en même temps un mouvement uniforme de translation dirigé perpendiculairement à sa longueur, nous retomberons dans le cas qui a d'abord été examiné en détail par M. Breton, c'est-à-dire dans le cas d'une roue qui roule sur un plan horizontal. Alors le point m ne décrit plus un cercle, mais bien une courbe du genre des cycloïdes et *la vitesse de ce point change à chaque instant, non-seulement de direction, mais aussi de grandeur.* Ces deux changements sont encore dus aux liaisons qui existent entre le point m et les autres points de la roue; les forces qui les produisent sont : 1° une force dirigée suivant le rayon de courbure ρ de la trajectoire du point m, et égale à $\frac{mv^2}{\rho}$; 2° une force dirigée suivant la tangente à la courbe, dans le sens du mouvement, et égale à $m\frac{dv}{dt}$. Le point m réagit donc sur les autres points du système comme le feraient deux forces égales et contraires aux précédentes. M. Breton n'a pensé qu'à la première de ces deux forces, et c'est ce qui l'a conduit à des résultats aussi singuliers; s'il eût tenu compte de la force tangentielle, il aurait trouvé que toutes les forces que le mouvement développe dans le corps se font équilibre, comme je vais facilement le faire voir.

J'emploierai pour cela les notations du Mémoire relatives à la figure de la page 121, et j'appellerai de plus ω l'angle OMC.

L'expression de la force centrifuge est (page 124)

$$f = m\frac{V^2}{R^2}(n - R\cos\psi).$$

Appelons k la force tangentielle dirigée en sens contraire du mouvement, et nous aurons

$$k = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2};$$

or les valeurs de x, y et $\frac{dy}{dx}$, en fonction de φ, donnent

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{d\varphi}{dt}\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\varphi};$$

on en déduit, en remarquant que $\frac{d\varphi}{dt}$ est constant,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Rr\sin\varphi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\varphi}} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{Rr\sin\varphi}{n}.$$

Le triangle OCM donne $\frac{r\sin\varphi}{n} = \sin\psi$; d'ailleurs $\frac{d\varphi}{dt}$ est égal à $\frac{V}{R}$; on a donc enfin pour la force tangentielle cherchée,

$$k = m\frac{V^2}{R}\sin\psi.$$

Pour trouver la résultante des deux forces f et k, nous remarquerons que le triangle OCM donne $\sin\omega = \frac{R\sin\psi}{r}$, et par suite,

$$\cos\omega = \frac{\sqrt{r^2 - (R\sin\psi)^2}}{r} = \frac{n - R\cos\psi}{r};$$

si donc nous projetons les forces f et k sur la tangente au cercle de rayon r passant par le point M, nous trouverons pour la somme des projections

$$f\sin\omega - k\cos\omega = 0;$$

nous trouverons de même pour la somme des projections F des forces f et k sur le prolongement du rayon OM,

$$F = f\cos\omega + k\sin\omega = m\frac{V^2}{R^2}\cdot\frac{n^2 + R^2 - 2nR\cos\psi}{r} = m\frac{V^2}{R^2}r.$$

Les deux forces f et k ont donc pour résultante une force F dirigée suivant le prolongement du rayon OM, et égale à la force centrifuge qui se développait au point m lorsque la roue n'avait qu'un mouvement uniforme de rotation autour de son axe; il y a donc équilibre entre toutes les forces développées dans la roue par le mouvement de roulement. On peut, du reste, voir *à priori* et sans calcul qu'il en doit être ainsi: mais il était bon de montrer comment cette conséquence résulte des formules mêmes de M. Breton.