JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Note sur un théorème de Fermat

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 184-185.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__184_0>

NOTE

SUR UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR M. LEBESGUE.

Théorème. « Si l'on admet que l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ soit im-
» possible en nombres entiers, il en résultera que l'équation
» $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ l'est également. »

Démonstration. Dans l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ on peut toujours supposer les inconnues x, y, z premières deux à deux, de sorte qu'il y aura nécessairement deux inconnues impaires et l'une paire, puisqu'elles ne sauraient être toutes trois impaires. Il faut encore que z soit impair, puisqu'un carré pair ne saurait avoir la forme $4k + 2$. On peut, d'après cela, considérer l'équation $(2^a x)^{2n} + y^{2n} = z^2$, où x, y, z seront supposés impairs. Cela posé, en faisant $x = pq$, sous l'hypothèse de p et q impairs et premiers entre eux, il en résultera

$$z \pm y^n = 2p^{2n}, \quad z \mp y^n = 2^{2na-1}.q^{2n},$$

et par conséquent,

$$z = p^{2n} + 2^{2na-2}.q^{2n}, \quad \pm y^n = p^{2n} - 2^{2na-2}.q^{2n}.$$

1°. Pour $n = 1$, on a la solution connue

$$z = p^2 + (2^{a-1}q)^2, \quad \pm y = p^2 - (2^{a-1}q)^2, \quad x = 2^a pq;$$

2°. Pour $n = 2$, l'équation $\pm y^n = p^{2n} - 2^{2na-2}.q^{2n}$ ne peut subsister avec le signe inférieur, on prendra donc $y^2 = p^4 - 2^{4a-2}q^4$; donc si l'on pose $q = rs$, il en résultera $p^2 \pm y = 2r^4$, $p^2 \mp y = 2^{4a-3}.s^4$, et par suite l'équation $p^2 = r^4 + (2^{a-1}s)^4$, où les inconnues sont impaires et premières entre elles. Ainsi l'équation $(2^a x)^4 + y^4 = z^2$ entraîne l'équation $(2^{a-1}s)^4 + r^4 = p^2$, celle-ci entraîne semblablement $(2^{a-2}t)^4 + u^4 = v^2$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve $P^4 + Q^4 = R^2$, où P, Q, R sont des nombres impairs, ce qui est impossible. Il est donc prouvé que $x^4 + y^4 = z^2$ est impossible, ainsi qu'on l'a déjà démontré par la méthode de Fermat. L'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ sera par conséquent impossible pour toutes les valeurs paires de n.

3°. Pour le cas de n impair, l'équation $\pm y^n = p^{2n} - 2^{2an-2}.q^{2n}$ pourra s'écrire $y^n = p^{2n} - 2^{2an-2}.q^{2n}$, en supposant y positif ou négatif. Soit donc $y = rs$, en supposant r et s impairs premiers entre eux, et l'un d'eux négatif s'il est nécessaire; il faudra poser $r^n = p^n + 2^{an-1}.q^n$, $s^n = p^n - 2^{an-1}.q^n$; d'où $r^n - s^n = (2^a q)^n$. Quel que soit le signe de s, cette dernière équation a toujours la forme $X^n + Y^n = Z^n$; donc l'impossibilité de cette équation entraîne celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$.

Il résulte donc des théorèmes démontrés par Fermat et Euler, par MM. Legendre et Dirichlet, et en dernier lieu par M. Lamé, que l'impossibilité de l'équation $x^{4n} + y^{4n} = z^2$, et celle de l'équation $x^n + y^n = z^n$ pour $n = 3, 5, 7$, entraînent celle de l'équation $x^{2n} + y^{2n} = z^2$ pour

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 - 12 - 14, 15, 16 - 18 - 20, 21, 22 \\ - 24, 25, 26, 27, 28 - 30, \text{ etc.}$$

Les recherches que j'ai faites sur l'équation $x^n + y^n = z^n$ m'ont conduit à démontrer l'impossibilité de quelques équations indéterminées dont je m'occuperai dans un autre article.