JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

TH. OLIVIER

Note sur les engrenages de White

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 146-153.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__146_0>

NOTE

SUR LES ENGRENAGES DE WHITE;

PAR TH. **OLIVIER** [*].

La démonstration relative aux engrenages de White, que M. Delaunay vient de publier dans ce Journal, n'est pas nouvelle. Cette démonstration est la première qui se soit présentée à mon esprit lorsque j'ai commencé à m'occuper de la théorie des engrenages. Je l'ai communiquée à plusieurs personnes, et en particulier à M. Arago, lorsqu'il était chargé du Cours de Machines à l'École polytechnique. Enfin je m'en suis constamment servi dans mes leçons à l'École centrale, depuis 1829. On ne peut en effet imaginer rien de plus simple quand il s'agit seulement de faire voir que les engrenages de White ont, en effet, les propriétés que leur attribuait ce mécanicien. C'est à cause de cette simplicité même que je tiens à mon droit de priorité. Ce droit, je l'établirai d'une manière incontestable par l'extrait suivant d'un Mémoire que j'ai composé en 1817, à l'École d'application de Metz, et qui a été visé (ainsi que le sont les travaux des élèves sous-lieutenants) par les officiers placés alors à la tête de l'École.

Extrait du Mémoire sur le projet de machine. — (École de Metz.)

« La première idée qui conduit à l'engrenage de White est celle-ci.

» Considérons l'engrenage composé d'une crémaillère et d'un pignon.

» Supposons la crémaillère composée de m bandes dentées réunies ensemble et de manière à ne former qu'une seule bande dentée; considérons le pignon comme composé aussi de m rondelles dentées; donnons à chaque rondelle du pignon un mouvement proportionnel de ro-

[*] Cette Note, accompagnée des pièces justificatives, a été communiquée à la Société Philomatique, dans sa séance du 21 mars 1840.

tation autour de l'axe et à chaque bande de la crémaillère un mouvement de translation correspondant à celui de la rondelle qui est chargée de la conduire.

» On voit qu'après ce mouvement, les extrémités des dents formeront une série d'hélices sur le cylindre du pignon et des lignes droites parallèles entre elles et obliques sur la crémaillère, et ce système se conduira parfaitement.

» Mais de cette idée on est conduit à cette conséquence, que vu le grand nombre de ces bandes dentées et des rondelles dentées (ou pignons) correspondantes, on peut diminuer la longueur des dents dans chaque système, et la diminuer d'autant plus, que le nombre des bandes sera plus grand; et en effet, la longueur de la dent n'est nécessaire que pour que, vu l'écartement des dents, lorsqu'une dent quitte, une nouvelle puisse prendre, et elle doit se mettre en prise un peu avant, et cela, pour qu'il n'y ait pas d'interruption dans le mouvement de rotation, ni de perte de temps; mais l'on voit que si la première dent de la première bande quitte, et que la deuxième dent de cette même bande ne puisse encore se mettre en prise, la première dent de la deuxième bande n'aura pas encore quitté, et ainsi de suite. De sorte que de proche en proche, on voit que pendant tout le temps du mouvement, on aura des bandes qui, alternativement, conduiront et ne serviront pas à conduire le pignon, *et vice versâ*.

» On sait que la quantité de glissement qui s'opère sur une dent d'une première roue par la dent correspondante de la deuxième roue, peut être rendue aussi petite que l'on veut, en rognant la longueur des dents; par conséquent, plus on augmentera le nombre des bandes, plus on arrivera à avoir un engrenage parfait, un engrenage dans lequel le frottement ira toujours en diminuant.

» Enfin, la surface sur laquelle s'opère le frottement est réduite à un point, au premier point de contact des deux dents en prise, lorsque l'on suppose les bandes en nombre infini.

» Les dents ont donc changé de forme; auparavant, la courbe qui les terminait était contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe du mouvement de rotation; maintenant cette courbe se réduit à la ligne formée par le premier point de chaque dent de ce nombre infini de bandes, en sorte que la forme de la dent a disparu, elle n'est plus nécessaire, puisque son premier point seul suffit pour obtenir la ligne de contact qui seule forme actuellement la dent, et cette ligne est tracée sur la surface extérieure du noyau à denter au moyen de la machine. Pour une crémaillère, cette ligne est une droite; pour une roue elle est une hélice tracée sur le cylindre noyau de la roue ou pignon.

» De plus, on voit que chaque point de la ligne de contact de la première surface a son homologue sur la ligne de contact correspondante de la seconde surface, et que ces points homologues se touchent, pour se quitter immédiatement en tendant à glisser l'un sur l'autre.

» Le frottement est donc ici l'effet d'un roulement des lignes de contact les unes sur les autres, ce qui donne le frottement le plus doux que l'on connaisse dans les arts : celui dit *de deuxième espèce*.

» De cette discussion nous conclurons : Que la forme primitive des dents ne doit plus être prise en considération, puisque le premier point de contact de chaque dent est seul nécessaire, le seul considéré et employé ;

» Que le mouvement est uniforme, puisque l'on est parti d'un mouvement uniforme qui dépendait alors de la figure de la dent, et qui ne dépend plus maintenant que de ce que les lignes de contact qui forment l'arète extrême des dents, se roulent sans se glisser. Et l'on voit évidemment que cet engrenage, par l'usage continuel, *le travail,* tendra nécessairement à se perfectionner.

» La figure des dents du nouvel engrenage est arbitraire; elle ne dépend plus que de la ténacité de la matière employée, etc... »

Metz, 19 août 1817.

Si dans les deux Mémoires présentés à l'Institut en 1825, je n'ai pas consigné cette démonstration, c'est qu'elle n'est pas assez générale.

J'avais besoin d'un autre mode de démonstration pour bien faire voir que l'on pourrait, d'après les procédés mécaniques de White, construire trois espèces d'engrenages : le premier ayant un frottement de roulement direct, le second ayant un frottement de roulement angulaire, et le troisième ayant un frottement de glissement angulaire. White n'avait pas aperçu les frottements angulaires; je crois être le premier qui ait signalé ce genre de frottement.

La méthode que j'ai employée dans les Mémoires présentés à l'Institut, avait non-seulement l'avantage d'être vraiment géométrique et rigoureuse, mais encore celui de bien faire voir, sans aucun doute, que pour les engrenages cylindriques et coniques, le frottement de *roulement direct* existait lorsque la ligne ξ, lieu des contacts successifs de deux dents, était une droite située dans le plan des axes; et que le frottement de *roulement angulaire* existait lorsque cette droite ξ n'était pas située dans le plan des axes; dans l'un et l'autre de ces deux cas, les distances de chacun des points de la droite ξ aux deux axes, étant toujours dans un rapport constant et inverse de celui des vitesses de ces deux axes.

Cette même méthode me permettait aussi de faire voir que le frottement de *glissement angulaire*, non-seulement existait toujours dans les engrenages cylindriques et coniques à la White, lorsque les distances des points de la droite ξ aux deux axes n'étaient pas dans le rapport inverse des vitesses des axes, mais qu'il fallait impérieusement, dans ce cas, que la droite ξ fût hors des plans des axes, pour que l'engrenage fût possible.

D'ailleurs, c'est par la considération des surfaces idéales et de révolution engendrées par la ligne ξ, lieu des contacts successifs de deux dents en prise, que j'ai pu établir le théorème qui, à mon avis, constitue toute la théorie géométrique des engrenages à la White, de ceux dans lesquels les surfaces des dents ne se mettent successivement en contact que par un seul point. Voici ce théorème.

Étant donnés : 1° deux axes A et A' animés, le premier d'une vitesse v et le second d'une vitesse v'; 2° deux surfaces ζ et ζ' fixées, la première à l'axe A, la seconde à l'axe A'.

Si ces deux surfaces en tournant respectivement autour de l'axe auquel chacune se trouve liée, se mettent successivement en contact par un seul point m, m', m'',... lesquels points forment dans l'espace une courbe ξ dite *lieu des contacts successifs des surfaces de deux dents homologues ou en prise;*

En faisant tourner la courbe ξ autour des axes, on obtiendra deux surfaces de révolution, l'une Φ, fixée à l'axe A; l'autre Φ', fixée à l'axe A'.

Les deux surfaces Φ et ζ se couperont suivant une courbe δ, les deux surfaces Φ' et ζ' se couperont suivant une courbe δ'; et l'on pourra remplacer les surfaces ζ et ζ' par les courbes δ et δ', en ce sens que si l'on regarde ces deux courbes comme rigides, elles se conduiront l'une par l'autre, ainsi que le faisaient les deux surfaces ζ et ζ'; et le frottement qui se manifestera pour les courbes δ et δ' sera de même nature que celui qui se développerait sur les deux surfaces ζ et ζ'.

Cela posé :

1°. Si les distances aux deux axes de tout point m de la courbe ξ sont dans le rapport inverse de celui des vitesses v et v', le rapport de ces vitesses étant supposé être constant, être le même à chaque instant du mouvement, le frottement sera de *roulement;*

2°. Si le rapport des distances aux axes n'est pas constant ou n'est pas inverse du rapport constant des vitesses, le frottement sera de *glissement;*

3°. Chaque point m de la courbe ξ engendre un cercle en tournant, soit autour de l'axe A, soit autour de l'axe A'; désignant par C et C' les cercles engendrés par le point m, et respectivement autour des axes A et A', il pourra arriver que C et C' soient tangents l'un à l'autre au point m, ou qu'ils se croisent en ce point m. Lorsque les deux cercles sont tangents, le frottement est *direct;* lorsque les deux cercles se croisent, le frottement est *angulaire;* car dans le premier cas, les courbes δ et δ' ont même tangente au point m; dans le second cas, ces courbes se croisent en ce point m.

4°. Si les deux cercles C et C' sont tangents, alors le point m et les deux axes sont dans un même plan; dans ce cas les deux axes et la courbe ξ seront dans un même plan; dès lors les deux surfaces Φ et Φ' seront tangentes l'une à l'autre, suivant la courbe ξ. Dans ce cas, on retombe sur les engrenages cylindriques et coniques, et la courbe ξ doit impérieusement être une droite, si l'on veut que le frottement de roulement existe, et dès lors le frottement est de *roulement direct*. On ne peut pas construire un engrenage à la White dans lequel le frottement soit de *glissement direct*.

5°. Si les deux cercles C et C' se croisent, alors les axes peuvent être dans un même plan ou non; le point m est hors du plan des axes dans le premier cas; les deux surfaces Φ et Φ', dans tous les cas, se couperont suivant la courbe ξ.

Le frottement sera donc, dans tous les cas, un frottement *angulaire*, car les courbes δ et δ' se croiseront au point m, et l'on pourra construire deux espèces d'engrenages : dans l'un le frottement sera de *roulement angulaire*, dans l'autre le frottement sera de *glissement angulaire;* et pour l'un et l'autre, les vitesses des axes seront dans un rapport constant.

Je crois devoir consigner ici une idée que j'ai eue depuis plusieurs années, et que j'ai communiquée à plusieurs personnes.

Il s'agit d'une espèce toute particulière d'engrenages à la White, et auxquels je donnai le nom d'engrenages à *tire-bouchon*, n'ayant pas trouvé d'expression qui fût mieux en rapport avec la forme de ces sortes d'engrenages.

En se rappelant ce qui a été dit précédemment et ce que j'ai développé dans la Note placée à la suite de mon premier Mémoire sur les engrenages de White, publié dans ce Journal, on voit que l'idée géométrique est de considérer les courbes δ et δ' intersections des surfaces ζ et ζ' de deux dents en présence, par les surfaces de révolution Φ et Φ' engendrées par la ligne ξ des points successifs de contact des deux dents autour des axes A et A' des roues dentées, comme deux lignes rigides, et que l'on peut remplacer les surfaces ζ et ζ' par ces courbes δ et δ'.

Cette idée géométrique me paraît devoir être facile à réaliser en pratique, et cela en prenant des tiges cylindriques que l'on plierait suivant la forme des courbes δ et δ', et dès lors les surfaces ζ et ζ' ne seraient autres que les surfaces de ces tiges ainsi pliées.

Je développe mon idée.

Prenons l'engrenage cylindrique pour lequel les surfaces idéales et de révolution Φ et Φ' engendrées autour des axes seront deux cylindres se coupant suivant deux droites parallèles aux axes, dont l'une sera considérée comme étant la ligne ξ, lieu des contacts des dents. Les courbes δ et δ' seront deux hélices tracées, la première sur le cylindre Φ, la seconde sur le cylindre Φ', et ces deux courbes couperont chacune les génératrices du cylindre sur lequel elle se trouve tracée sous le même angle α.

On sait qu'alors les deux courbes δ et δ' se conduiront uniformément et avec un frottement de roulement angulaire.

Concevons que le premier axe A soit une tige fixée par son extrémité à une rondelle circulaire V, et que cette rondelle V soit divisée en un nombre de parties égales, et que de chaque division s'élance une tige δ cylindrique tout d'abord, mais pliée ensuite sous la forme d'une hélice cylindrique et coupant les génératrices du cylindre sous l'angle α. De sorte que cette tige héliçoïdale soit fixée à la rondelle V par une de ses extrémités, l'autre extrémité étant libre comme dans un tire-bouchon.

Imaginons la même chose pour le deuxième axe A'; mais lorsque l'on mettra l'engrenage en présence, il sera placé *tête-bêche*, c'est-à-dire que les extrémités libres des tiges héliçoïdales δ seront tournées vers la rondelle V' sur laquelle seront fixées les tiges héliçoïdales δ'; et réciproquement, les extrémités libres des tiges héliçoïdales δ' seront tournées vers la rondelle V sur laquelle seront fixées les tiges héliçoïdales δ.

Si l'on considère deux dents ou tiges héliçoïdales δ et δ' devant s'engrener ou se conduire, on peut facilement concevoir qu'elles s'agraffent l'une l'autre à la façon de deux anneaux d'une chaîne, de sorte que la tige δ tourne autour de la tige δ', son extrémité libre venant embrasser cette tige δ' près de la rondelle V', pour qu'ensuite, après un certain angle de révolution des axes, l'extrémité libre de δ' se dégage de la tige δ et près de la rondelle V.

On voit tout de suite que les tiges héliçoïdales, formées ainsi que nous l'indiquons, ne donneront point les surfaces géométriques rigoureuses qui se mettraient pendant le mouvement de rotation des axes en contact par des points qui se trouveraient rigoureusement situés sur la droite géométrique ξ.

On aura donc tout d'abord un frottement de glissement angulaire, et de plus, les vitesses des axes ne seront pas dans un rapport constant.

Mais le frottement de glissement sera très petit et les variations dans l'uniformité du mouvement des axes seront aussi très petites, de sorte que par un travail soutenu pendant quelque temps, les tiges δ et δ' s'useront réciproquement, et l'on arrivera à avoir un engrenage géométrique.

Ce que je viens de dire pour l'engrenage cylindrique s'applique évidemment à l'engrenage conique où les axes se coupent, et à l'engrenage hyperboloïdique où les axes ne sont pas situés dans un même plan.

Ici je dois faire une remarque qui n'est pas sans importance.

Lorsque dans un engrenage le frottement de glissement, qu'il soit direct ou angulaire, a lieu, les dents s'usent l'une par l'autre, se déforment et tendent à prendre la forme qui permettra au frottement de roulement direct ou angulaire, d'exister. Dans les engrenages ordinaires le profil des dents qui donne le frottement de roulement, n'est autre que les cercles primitifs; de sorte que par le travail, l'engrenage se détruit sans cesse.

Dans les engrenages à la White, le profil des dents est arbitraire. Il suffit que le point de contact de deux dents se meuve sur la ligne ξ; dès lors l'engrenage par le travail détruit sur les surfaces ζ et ζ' des dents, tout ce qu'il est nécessaire de détruire pour arriver à la ligne ξ.

Cette destruction opérée, l'engrenage n'en subsiste pas moins, en ce sens que les dents existent toujours, quoique leur forme primitive soit altérée par le travail, et perfectionnée et amenée par ce même travail à la forme géométrique voulue.

On conçoit dès lors que pour ces sortes d'engrenages il faut que l'exécution primitive laisse peu à faire au travail des dents, s'usant l'une par l'autre, afin que l'engrenage puisse être promptement livré en bon état et satisfaisant à la condition du frottement de roulement.