JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL BRETON

Mémoire sur les forces centrifuges développées dans le mouvement des corps qui roulent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 120-145.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__120_0>

MÉMOIRE

SUR LES FORCES CENTRIFUGES

DÉVELOPPÉES DANS LE MOUVEMENT DES CORPS QUI ROULENT;

Par M. Paul BRETON,

Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

1. Pour donner une idée des recherches qui font l'objet de ce Mémoire et faire comprendre de quelles forces centrifuges nous allons parler, nous prendrons tout d'abord un exemple bien simple, celui d'une roue qui roule sur un chemin horizontal en ligne droite.

Si l'essieu était fixe et que la roue ne fît que tourner autour, ses différentes parties tendraient à s'en écarter en vertu de la force centrifuge qui les sollicite. Lorsque la roue est *bien centrée*, c'est-à-dire lorsqu'elle est composée de points matériels distribués symétriquement autour de l'essieu, les forces centrifuges ont une résultante nulle. Dans le cas contraire, l'axe de rotation supporte un effort résultant de l'action des mêmes forces sur la roue. Dans les deux cas on se rend compte de ce qui se passe en admettant cette loi générale :

Lorsqu'un point matériel se meut dans une ligne courbe, il est sollicité à chaque instant par une force dirigée normalement à la courbe.

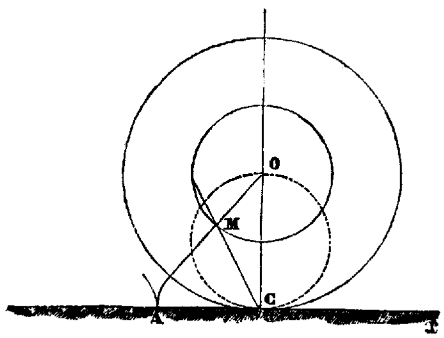
La mécanique démontre que *cette force est dirigée du centre de courbure vers la courbe, et qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse du point matériel et réciproque au rayon de courbure.*

Nous appellerons, dans ce qui va suivre, dm la masse d'un point matériel, v sa vitesse et ρ le rayon de courbure de sa trajectoire. De plus, nommons f l'intensité de cette force centrifuge, nous aurons

$$f = dm \cdot \frac{v^2}{\rho}.$$

2. Supposons maintenant une roue cheminant en ligne droite, et roulant à la manière ordinaire, c'est-à-dire développant sa circonférence sans glisser. Les points de la roue décrivent alors des lignes courbes; ceux de la circonférence parcourent des cycloïdes; les trajectoires des autres points, différentes de la cycloïde, forment avec elle une même famille de courbes. La loi que nous venons de citer indique l'existence d'une force centrifuge appliquée à chaque point de la roue: nous allons rechercher l'expression générale de ces forces, leur résultante, sa direction et son point d'application.

Pour cela il faut connaître la vitesse de chaque point de la roue, le rayon de courbure de sa trajectoire, et la direction de la normale à celle-ci. Remarquons d'abord que la parallèle à l'essieu menée par le point d'appui de la roue en est l'*axe instantané de rotation;* il résulte de là que toutes les normales aux courbes décrites rencontrent cet axe, ce qui suffit pour les déterminer.



A l'égard des rayons de courbure on les obtiendra, soit en partant de la relation entre les coordonnées de chaque trajectoire, soit en faisant usage de la considération des infiniment petits dans la génération même des courbes.

Quoique ce dernier moyen soit le plus simple, nous préférons cependant l'emploi de l'équation entre l'abscisse et l'ordonnée, parce qu'il met en évidence d'une manière plus nette la relation qui existe entre les trajectoires de tous les points de la roue. D'ailleurs, la singularité des conclusions qui vont ressortir de nos calculs, exige que nous établissions les démonstrations de nos formules le plus rigoureusement qu'il sera possible; ce n'est pas que l'usage des infiniment petits nous paraisse manquer de certitude dans les résultats qu'on en obtient, mais il se peut que quelques-uns de nos lecteurs ne partagent point notre avis.

Prenons pour axe des abscisses le chemin sur lequel roule la roue. Quant à l'axe des coordonnées, nous supposerons que c'est la verticale sur laquelle se trouvait à l'origine du mouvement le point quelconque M, que nous admettons s'être trouvé d'abord au-dessous du centre de la roue. Cela posé, conservons les dénominations déjà adoptées, et de plus, nommons

V la vitesse de l'essieu;

R le rayon de la roue ou plutôt de la circonférence qui se développe sans glisser;

n la portion de la normale comprise entre le point quelconque M et l'axe instantané de rotation en C;

φ l'angle compris entre les deux plans OC, OM, menés par l'essieu et passant, le premier par l'axe instantané C, et l'autre par le point M;

ψ l'angle compris entre les deux plans CO, CM, menés par l'axe instantané C, passant, l'un par l'essieu, et le second par le point M;

r le rayon du point M ou sa distance à l'essieu;

nous aurons

$$x = \mathrm{R}\varphi - r\sin\varphi,$$
$$y = \mathrm{R} - r\cos\varphi.$$

On en déduit

$$x = \mathrm{R}.\ \mathrm{arc\ cos}\,\frac{\mathrm{R}-y}{r} - \sqrt{r^2-(\mathrm{R}-y)^2}.$$

Telle est la relation qui existe entre l'abscisse et l'ordonnée de la courbe décrite par le point M pris à la distance r de l'essieu. Le lecteur à qui les procédés du calcul différentiel sont familiers, en tirera sans peine les expressions suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{r^2-(\mathrm{R}-y)^2}}{y},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{R}^2-\mathrm{R}y-r^2}{y^3}.$$

Rappelons que le rayon de courbure ρ a pour expression

$$\rho = \pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

que l'on prend avec le signe supérieur ou avec le signe inférieur, suivant que l'on a $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ou $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, c'est-à-dire suivant que le centre de courbure est situé au-dessus ou au-dessous de la courbe.

Substituant dans cette valeur de ρ celles de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ trouvées ci-dessus, on obtient

$$\rho = \pm \frac{(r^2 + 2Ry - R^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 - Ry - r^2}.$$

Remarquons en passant que les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée, celles des coefficients différentiels et celles du rayon de courbure deviennent identiques avec les quantités analogues relatives à la cycloïde, lorsque l'on pose

$$r = R;$$

c'est ce qui doit avoir lieu, en effet, d'après la génération des courbes que nous considérons.

3. Pour approprier l'expression précédente du rayon de courbure à l'usage que nous en voulons faire, nous allons la transformer et la simplifier.

Observons d'abord que l'on a entre les lignes R, r et y les relations toutes géométriques

$$r^2 + 2Ry - R^2 = n^2,$$
$$R^2 - Ry - r^2 = r(R\cos\varphi - r);$$

il résulte de là l'expression

$$\rho = \pm \frac{n^3}{r(R\cos\varphi - r};$$

et comme l'on a aussi

$$r(R\cos\varphi - r) = n(R\cos\psi - n),$$

la valeur de ρ se présente sous la forme

$$\rho = \pm \frac{n^2}{R\cos\psi - n}.$$

Il nous reste à exprimer la vitesse de chaque point mobile en fonction de la vitesse de l'essieu. Rien de plus facile : la vitesse de l'axe instantané de rotation étant nulle, celles de deux points quelconques sont entre elles dans le même rapport que leurs distances au même axe. On peut donc écrire la relation simple

$$v = \frac{V}{R}.n.$$

4. Au moyen des valeurs de la vitesse et du rayon de courbure, nous sommes en état d'obtenir celle de la force centrifuge qui sollicite le point quelconque M; on a

$$f = \mp\, dm.\frac{V^2}{R^2}(R\cos\psi - n).$$

Le double signe de ρ a été renversé à cause que la force centrifuge est dirigée du centre de courbure vers la courbe. La force f tendra donc à soulever le point qu'elle sollicite ou à l'abaisser, suivant que sa valeur, abstraction faite du signe inférieur, sera positive ou négative. Cela du moins aura lieu sans restriction lorsque tous les points de la roue seront situés au-dessus du chemin qu'elle parcourt. Mais on comprend qu'une partie de la roue pourrait se trouver au contraire en-dessous, comme cela arrive à celles des waggons des chemins de fer qui sont entourées d'un rebord dont le diamètre est plus grand que le leur. C'est pourquoi, au lieu de considérer la force centrifuge elle-même, nous la décomposerons en deux autres : l'une verticale et passant par l'essieu, la seconde horizontale. La résultante des forces horizontales provenant de cette décomposition sera nulle si la roue est un solide de révolution autour de son essieu. Dans le cas contraire, on aura à considérer les intégrales définies

$$\sum f \sin\psi \quad \text{et} \quad \sum f \cos\psi.$$

Le signe $\sum$ s'étendant à tous les points matériels sollicités par les forces

f, on a de cette manière

$$\sum f \sin\psi = -\frac{V^2}{R^2}\sum dm\,(R\cos\psi - n)\sin\psi,$$

$$\sum f \cos\psi = -\frac{V^2}{R^2}\sum dm\,(R\cos\psi - n)\cos\psi.$$

Désignons par M la masse totale de la roue, et faisons attention que les sommes $\sum dm.n\sin\psi$ et $\sum dm.n\cos\psi$ ne sont autre chose que les moments de la roue pris par rapport aux axes des coordonnées, il viendra

$$\sum f \sin\psi = -\frac{V^2}{R^2}\sum dm\sin\psi\cos\psi,$$

$$\sum f \cos\psi = M\frac{V^2}{R^2}\left(1 - \frac{1}{M}\sum dm\cos^2\psi\right).$$

5. Il est bien entendu que la roue est *centrée*, et que par conséquent l'essieu passe par son centre de gravité. Autrement il faudrait prendre en considération la position du centre de gravité qui ne serait plus sur la verticale menée par l'axe instantané. Comme une pareille extension du problème serait actuellement sans intérêt, nous supposerons que la roue est un solide de révolution. Nous laisserons de côté les calculs relatifs à la position du point d'application de la résultante des forces centrifuges, calculs qui exigeraient l'emploi des moments des composantes $f\sin\psi$ et $f\cos\psi$, pris par rapport à l'un des points de l'axe instantané de rotation. Plus loin, en donnant à la question toute la généralité qu'elle comporte, nous reviendrons sur la manière de tenir compte de toutes ces circonstances.

6. Pour le moment, nous n'avons à nous occuper que de l'expression

$$\sum f \cos\psi = M\frac{V^2}{R}\left(1 - \frac{1}{M}\sum dm\cos^2\psi\right)$$

formée de cette autre

$$f\cos\psi = -dm\frac{V^2}{R^2}(R\cos\psi - n).$$

A la seule inspection de $f\cos\psi$, on reconnaît quels sont les points de la roue pour lesquels la valeur de cette composante est positive, nulle ou négative, c'est-à-dire les points que la force centrifuge tend à soulever ou à abaisser, et ceux sur lesquels elle n'exerce aucune action. Ces derniers se meuvent évidemment dans les points d'inflexion de leurs trajectoires, pour lesquels on a

$$\frac{1}{\rho} = 0, \quad \text{ou} \quad R\cos\psi - n = 0.$$

Cette dernière équation entre n et ψ n'est autre chose que l'équation polaire d'une circonférence de cercle qui a pour diamètre le rayon de la roue et dont le centre est au milieu du rayon vertical qui passe par l'axe instantané. On conclut de là que *dans une roue en mouvement les seuls points sur lesquels la force centrifuge n'agit point ont pour lieu géométrique une surface cylindrique à base circulaire qui a pour diamètre le rayon de la roue, et dont l'axe, parallèle à l'essieu et à l'axe instantané de rotation, est placé entre ceux-ci au milieu de la distance qui les sépare.*

A l'extérieur de cette surface cylindrique, et au-dessus de l'axe instantané, on a

$$R\cos\psi - n < 0 \quad \text{et} \quad \cos\psi < 0,$$

et par suite

$$f\cos\psi > 0.$$

A l'intérieur, au contraire, on a

$$R\cos\psi - n > 0 \quad \text{et} \quad \cos\psi > 0,$$

et par conséquent

$$f\cos\psi < 0.$$

Au-dessous de l'axe instantané la valeur de $R\cos\psi - n$ est constamment négative; mais $\cos\psi$ étant négatif en même temps, la valeur de $f\cos\psi$ est négative.

Ainsi *tous les points situés dans l'intérieur de la surface cylindrique de rayon* $\frac{1}{2}R$ *placée en-dessous de l'essieu ou plutôt au-dessus de l'axe instantané et ceux qui se trouvent au-dessous de cet axe sont animés de forces centrifuges qui tendent à abaisser la roue; tous les autres points tendent, au contraire, à la soulever.*

7. Notre travail serait à peu près sans but si les forces qui tendent à soulever la roue faisaient équilibre à celles qui tendent à l'abaisser. Mais il n'en est point ainsi, cette compensation n'existe même jamais. Pour le montrer, reprenons l'expression de la résultante verticale des forces centrifuges,

$$\sum f \cos \psi = \mathrm{M}\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{M}}\sum dm \cos^2\psi\right).$$

Le terme $\sum dm \cos^2\psi$ ne saurait surpasser M ni même l'égaler, car $\cos^2\psi$ est toujours une fraction moindre que l'unité. Ainsi le facteur $\left(1 - \frac{1}{\mathrm{M}}\sum dm \cos^2\psi\right)$, nécessairement plus petit que l'unité, a toujours une valeur positive. Cette valeur dépend essentiellement de la forme du mobile et de la densité de ses différentes parties; elle sera donnée dans chaque cas par des intégrales définies.

Nommons k ce facteur, F l'effort vertical dont l'existence vient d'être démontrée, P le poids de la roue, et g l'intensité de la pesanteur. Nous aurons

$$\mathrm{F} = k\frac{\mathrm{P}}{g}\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}},$$

expression qui donnera la valeur de F lorsque l'on connaîtra celle de k.

8. Remarquons ici l'absence de toute définition de la forme de la roue dans ce qui précède. Le solide qui roule peut en avoir une telle qu'on voudra l'imaginer, la généralité de nos formules n'en souffrira pas. Nous avons seulement supposé un solide tel que la résultante des forces centrifuges fût verticale. Cela arrive évidemment à tout solide de révolution qui a son axe de figure pour essieu, et peut être regardé comme sensiblement vrai pour des solides composés, comme les roues ordinaires des voitures, de parties distribuées symétriquement autour de l'essieu.

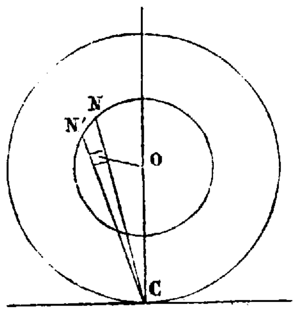
Quoi qu'il en soit, nous arrivons à cette conclusion : *une roue en mouvement est toujours sollicitée par une force verticale qui tend à la soulever, et cette force est proportionnelle au carré de la vitesse de la roue.*

On pourrait donc imprimer à une roue une vitesse telle que la résultante des forces centrifuges développées fût supérieure, non-seulement à son poids, mais encore à la charge que supporte l'essieu; de manière qu'elle n'exercerait aucune pression contre le sol.

Cette conclusion si singulière nous a engagé à détailler nos calculs de façon que chacun puisse les suivre facilement et les corriger s'ils étaient entachés d'inexactitude.

9. Nous allons maintenant présenter quelques applications du calcul à la recherche de la valeur F pour des solides de différentes formes, mais plus spécialement pour les anneaux cylindriques dans lesquels ils se décomposent naturellement.

Supposons premièrement un cylindre d'épaisseur uniforme de rayon r attaché à une circonférence de rayon R qui roule. Concevons ce cylindre divisé en tranches minces d'épaisseur variable par des plans parallèles à l'essieu menés par l'axe instantané, et chacune de ces tranches composée elle-même de filets déliés parallèles à l'axe du cylindre. Soit z son épaisseur, ϖ le poids de l'unité de volume de la matière homogène dont il est formé, nous aurons évidemment



$$dm = \frac{\varpi}{g} z.ndn.d\psi.$$

Par une première intégration qui embrasse tous les filets d'une même tranche on obtient sur-le-champ

$$\frac{\varpi}{g} z \cos\psi \, d\psi \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2}\right),$$

pour la portion de $\sum dm \cos^2\psi$ qui répond à cette tranche. Les limites n_1, n_0, sont relatives aux points extrêmes de la tranche que l'on suppose ici tout entière d'un même côté de l'axe instantané de rotation. S'il en était autrement, il faudrait prendre pour la première intégrale

$$\frac{\varpi}{g} z \cos^2\psi \, d\psi \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2}\right).$$

Dans les deux cas l'on a

$$n_1 = \mathrm{R}\cos\psi + \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi},$$
$$n_0 = \mathrm{R}\cos\psi - \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi};$$

d'où

$$\frac{n_1^2 - n_0^2}{2} = 2\mathrm{R}\cos\psi\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi},$$
$$\frac{n_1^2 + n_0^2}{2} = 2\mathrm{R}^2\cos^2\psi + r^2 - \mathrm{R}^2.$$

La deuxième intégration se fera sur les expressions

$$\frac{\varpi}{g} z . 2\mathrm{R}\, d\psi \cos^2\psi \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2\sin^2\psi},$$
$$\frac{\varpi}{g} z . d\psi \cos^2\psi (2\mathrm{R}^2\cos^2\psi + r^2 - \mathrm{R}^2).$$

Pour celle qui est affectée d'un radical, nous poserons

$$\sin\psi = u, \quad \cos\psi . d\psi = du, \quad \cos^2\psi = 1 - u^2,$$

ce qui transforme la différentielle à intégrer dans cette autre équivalente,

$$\frac{\varpi}{g} z . 2\mathrm{R}\, du (1 - u^2) \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 u^2},$$

ou

$$\frac{\varpi}{g} z . 2\mathrm{R}\, du \frac{(1 - u^2)(r^2 - \mathrm{R}^2 u^2)}{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 u^2}}.$$

Les limites de la variable étant

$$\psi_1 = + \operatorname{arc}\sin\frac{r}{\mathrm{R}}, \quad \psi_0 = - \operatorname{arc}\sin\frac{r}{\mathrm{R}},$$

celles de u seront

$$u_1 = \sin\psi_1 = \frac{r}{\mathrm{R}}, \quad u_0 = \sin\psi_0 = -\frac{r}{\mathrm{R}};$$

intégrant enfin et observant que l'on a

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{r^2 - R^2 u^2}} = \frac{\pi}{R},$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u^2\, du}{\sqrt{r^2 - R^2 u^2}} = \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\cdot\frac{\pi}{R},$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{u^4\, du}{\sqrt{r^2 - R^2 u^2}} = \frac{3}{4}\frac{r^2}{R^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\cdot\frac{\pi}{R},$$

il vient, après toute réduction,

$$\sum dm \cos^2\psi = \frac{\varpi}{g} z . 2R . \frac{\pi r^2}{8R^3}(4R^2 - r^2);$$

puis enfin,

$$F = \frac{\varpi}{g} z\pi r^2 \frac{V^2}{R}\cdot\frac{r^2}{4R^2}.$$

La valeur du coefficient k est ici $\frac{r^2}{4R^2}$. Différentions F par rapport à r, nous aurons la valeur de F pour un anneau d'épaisseur dr infiniment petite et de la largeur uniforme z, ayant r pour rayon. Cette valeur est donnée par la formule

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} z 2\pi r \frac{V^2}{R}\cdot\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2},$$

ce qui donne pour k,

$$k = \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}.$$

10. Tout ceci est limité au cas où le rayon du cylindre ne dépasse point le rayon de la roue. La seconde des expressions différentielles qui est relative au cas contraire, s'intègre facilement en observant que l'angle ψ a pour limites

$$\psi_1 = +\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \psi_0 = -\frac{\pi}{2};$$

d'ailleurs, on sait que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi\, d\psi = \frac{3}{4}\frac{\pi}{2};$$

il en résulte

$$\sum \cos^2\psi\, dm = \frac{\varpi}{g} z \frac{\pi}{2}\left(r^2 + \frac{1}{2}R^2\right),$$

et finalement

$$F = \frac{\varpi}{g} z\pi r^2 \frac{V^2}{R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{R^2}{r^2}\right);$$

on en tire

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} z . 2\pi r \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{2}.$$

Les valeurs de k données par ces deux dernières formules, et celles fournies par les précédentes ont pour maximum la fraction numérique $\frac{1}{2}$. Ce maximum est très remarquable, en ce que l'on a toujours, en désignant par M_e la masse des parties extérieures au cylindre de rayon R, et par F_e l'effort correspondant,

$$F_e = \frac{1}{2} M_e \frac{V^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{P}{g} \cdot \frac{V^2}{R}.$$

11. Si l'on avait à calculer F pour une sphère, on partirait du coefficient $\frac{dF}{dr}$ établi plus haut pour des anneaux cylindriques. Au moyen de la relation géométrique qui existe entre les cordes d'une sphère et leurs distances au centre, on substituerait dans ce coefficient la valeur de z en fonction de r. En intégrant et regardant $\frac{\varpi}{g}$ comme une quantité constante, on obtiendrait l'expression de l'effort F relatif à une sphère homogène, d'où l'on passerait, comme dans le cas des cylindres, au coefficient différentiel $\frac{dF}{dr}$ relatif à une couche sphérique homogène. Il suffirait ensuite de supposer ϖ variable avec r dans le nouveau coefficient différentiel pour arriver à l'expression de l'effort F dû au mouvement d'une sphère dont la densité varierait de la surface au centre, suivant une loi donnée.

Toutefois il sera nécessaire, dans chaque cas particulier, de rechercher la position de l'axe instantané du mobile. S'il se trouvait dans l'intérieur de celui-ci, il faudrait le partager en deux par une surface cylindrique ayant pour axe l'*essieu* et pour rayon la distance de celui-ci à l'axe instantané. On traiterait séparément les deux parties du solide, ainsi qu'il a été expliqué précédemment pour un cylindre homogène.

12. Nous venons d'esquisser la marche à suivre dans divers cas d'application; présentons maintenant un exemple numérique de l'emploi de nos formules.

Les roues employées dans l'industrie des transports sont ordinairement trop chargées pour arriver à un état tel qu'elles ne pressent plus le sol sur lequel elles roulent. Néanmoins, comme on peut obtenir sur les chemins de fer d'assez grandes vitesses, il est intéressant de rechercher si les waggons se trouvent encore éloignés des singulières conditions mises en évidence dans nos calculs.

13. Une roue de waggon se compose ordinairement d'une jante cylindrique réunie, par des rais symétriquement placés, à une boîte destinée à recevoir l'essieu. La jante est entourée d'un rebord saillant qui a pour objet d'empêcher le véhicule de sortir de la voie. Dans une approximation, nous supposerons cylindriques le rebord, les rais, la boîte de l'essieu et l'essieu lui-même. De plus, pour éviter toute difficulté relativement aux rais, nous concevrons qu'ils soient remplacés par un solide de révolution dont la section cylindrique autour de l'essieu soit équivalente à la leur. De cette manière, la question sera simplifiée et se résoudra sans peine.

Nommons à cet effet :

R_0 le rayon extérieur du rebord et c sa largeur;

R le rayon de la roue;

r_0 le rayon intérieur de la jante et c_0 sa largeur;

r_1 le rayon extérieur de la boîte de l'essieu et c_1 sa largeur;

r_2 le rayon de l'essieu et c_2 sa demi-longueur;

N le nombre des rais et A la section de l'un d'entre eux.

Calculons maintenant les efforts auxquels donnent lieu les différentes parties de la roue.

L'effort dû au rebord saillant doit être tiré de la formule

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} z 2\pi r \frac{V^2}{R} \times \frac{1}{2},$$

dans laquelle on posera $z = c$, $r = R_0$. L'intégrale prise entre R_0 et R, a pour expression,

$$\frac{\varpi}{g} c \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{R_0^2 - R^2}{2}\right).$$

Les efforts dus à la jante, à la boîte de l'essieu et à l'essieu lui-même, calculés par la formule

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} z 2\pi r \frac{V^2}{R} \times \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2},$$

sont, pour la jante,

$$\frac{\varpi}{g} c_0 \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{R^4 - r_0^4}{4R^2}\right);$$

pour la boîte de l'essieu,

$$\frac{\varpi}{g} c_1 \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{r_1^4 - r_2^4}{4R^2}\right);$$

et pour l'essieu,

$$\frac{\varpi}{g} c_2 \frac{V^2}{R} \pi \left(\frac{r_2^4}{4R^2}\right).$$

Enfin pour les rais, ou plutôt pour le solide de révolution qui en tient lieu par hypothèse, on a

$$2\pi r z = NA,$$

d'où

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\varpi}{g} NA \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2};$$

de là on tire, pour l'effort dû aux rais,

$$\frac{\varpi}{g} NA \frac{V^2}{R} \cdot \left(\frac{r_0^3 - r_1^3}{6R^2}\right);$$

faisant la somme de ces efforts partiels, on a enfin

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \pi \left(c \frac{R_0^2 - R^2}{2} + c_0 \frac{R^4 - r_0^4}{4R^2} + c_1 \frac{r_1^4 - r_2^4}{4R^2} + c_2 \frac{r_2^4}{4R^2} + \frac{NA}{\pi} \cdot \frac{r_0^3 - r_1^3}{6R^2} \right).$$

14. Pour les roues des waggons employés sur les divers chemins, on peut prendre les nombres suivants :

$$\begin{aligned}
&R_0 = 0^m{,}47, \quad c = 0^m{,}03, \quad R = 0^m{,}45, \quad r_0 = 0^m{,}42, \quad c_0 = 0{,}10, \\
&r_1 = 0^m{,}08, \quad c_1 = 0^m{,}16, \quad r_2 = 0{,}03, \quad c_2 = 0{,}80, \\
&A = 0^{m\cdot q}{,}0014, \quad N = 12.
\end{aligned}$$

Avant d'appliquer ces nombres, nous modifierons un peu la forme de F en l'écrivant de cette manière,

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R^3} \cdot \frac{\pi}{4} \left[2c\,(R^2 R_0^2 - R^4) + c_0 (R^4 - r_0^4) + c_1 (r_1^4 - r_2^4) + c_2 r_2^4 + 4 \frac{NA}{6\pi} (r_0^3 - r_1^3) \right].$$

On trouve par le calcul

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R^3} \cdot \frac{\pi}{4} (0{,}000223560 + 0{,}000986929 + 0{,}0000006424 + 0{,}000000648 + 0{,}0000262301),$$

ou

$$F = \frac{\varpi}{g} \cdot \frac{V^2}{R^3} \cdot \frac{\pi}{4} \times 0{,}001243791.$$

Les nombres mis dans la parenthèse répondent respectivement aux quantités littérales placées dans l'expression de F. C'est à dessein que nous les avons isolés d'abord; le lecteur aura ainsi sous les yeux la mesure de l'influence particulière de chaque partie de la roue. Celle des parties centrales est presque nulle.

Nous pouvons supposer que l'on a $\varpi = 7202$, valeur qui se rapporte au fer fondu, et $g = 9{,}81$. D'après cela, on peut écrire

$$F = 7{,}87\, V^2;$$

pour chaque valeur de V, la valeur correspondante de F exprimera en kilogrammes l'intensité de la force qui tend à soulever la roue.

Un waggon chargé, pesant P kilogrammes, n'exerce donc contre les rails que la pression P diminuée de l'effort 4F dû aux quatre roues, c'est-à-dire

$$\left(\tfrac{1}{4}P - 7{,}87\, V^2\right)^{kil.},$$

sur chaque point d'appui. Soit $P = 4000$; cherchons à quelle vitesse il n'y aurait plus de pression. Cette vitesse serait

$$V = \sqrt{\frac{1000}{7{,}87}};$$

c'est un peu plus de 11 mètres par seconde.

Pour un waggon vide du poids de 1000 kilogrammes, il suffit d'une vitesse de 5 mètres environ.

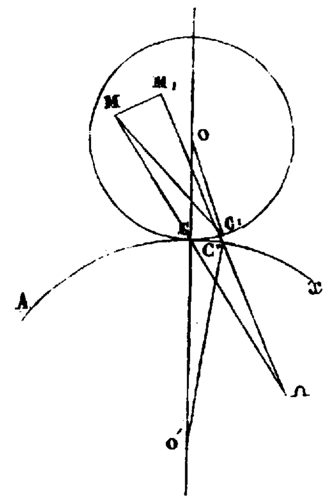
15. Aucune expérience n'a été faite dans le but de vérifier ces résultats de la théorie, car il ne paraît pas qu'on les ait soupçonnés jusqu'à présent. Un seul fait peut être cité à l'appui : nous voulons parler de la facilité avec laquelle les waggons oscillent transversalement aux rails.

On ne peut s'empêcher de demander ce qui arrive lorsque la vitesse d'un waggon rend sa pression sur les rails *négative*. Supposons, s'il est possible, qu'un waggon s'élève d'une petite quantité au-dessus des rails. La vitesse de rotation des roues n'augmentera plus puisque le frottement à leur circonférence aura cessé d'avoir lieu. Les roues continueront donc à tourner en vertu de leur vitesse acquise, et lorsque celle-ci aura diminué d'une petite quantité, l'effort vertical qui soulevait le waggon ne sera plus assez considérable pour produire cet effet : c'est-à-dire qu'il n'y aura jamais de soulèvement sensible.

Arrêtons-nous dans ces déductions; c'est au lecteur qu'il appartient d'en provoquer de nouvelles et d'expliquer ce qu'elles pourront avoir de paradoxal. Nous allons reprendre la théorie générale de l'action des forces centrifuges; l'analyse détaillée qui précède était nécessaire pour établir d'une manière nette et rigoureuse des formules qui exciteraient au moins le doute si elles étaient annoncées sans cette précaution. Dégagé maintenant de l'obligation d'être minutieux, notre marche sera plus rapide et plus simple à la fois.

16. Jusqu'à présent l'hypothèse d'un chemin en ligne droite, sur lequel roule une circonférence de cercle, a servi de base à nos calculs; mais on conçoit qu'il pourrait avoir une courbure quelconque. Pour montrer comment on peut apprécier l'influence de cette circonstance, nous supposerons que le chemin est une courbe plane comprise tout entière dans un plan perpendiculaire à l'essieu du mobile. On pourra regarder celui-ci comme roulant à chaque instant sur un chemin circulaire de la courbure qui a lieu au point où se trouve l'axe instantané de rotation. Le problème consistera uniquement à obtenir la valeur du rayon de courbure de la trajectoire d'un point matériel quelconque.

Conservons toujours les mêmes dénominations; nommons R' le rayon de courbure CO' du chemin ACx au point C. A partir de celui-ci portons les arcs infiniment petits CC_1, CC' du même côté sur la circonférence de la roue et sur le chemin parcouru. En passant de la position actuelle à la position voisine, la roue amènera le point C_1 à coïncider avec C'. Alors la ligne MC_1 rencontrera quelque part la normale MC suffisamment prolongée à une distance de M *égale au rayon cherché,* puisque le point de rencontre ainsi obtenu appartiendra à deux normales infiniment voisines. La quantité angulaire dont la ligne MC_1 aura tourné pour arriver à sa nouvelle position M_1 C', a pour mesure la somme des angles CMC_1 et $C\Omega C_1$ ou, en posant $CC_1 = CC' = ds$,



$$\frac{ds \cos\psi}{n} + \frac{ds \cos\psi}{\rho - n}.$$

Le rayon OC_1 qui forme avec MC_1 un angle constant, aura tourné de la même quantité angulaire, laquelle a pour mesure la somme des angles COC_1 et CO'C', c'est-à-dire

$$\frac{ds}{R} + \frac{ds}{R}.$$

Égalant ces deux expressions, il vient

$$\cos\psi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right) = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

Si la courbure au point C du chemin était en sens contraire de celle que nous avons supposée, c'est-à-dire si le centre du cercle osculateur tombait du même côté de l'axe instantané que le centre de la roue, on aurait

$$\cos\psi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\rho-n}\right)=\frac{1}{R}-\frac{1}{R'},$$

relation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que le signe de R′ y est changé. Ceci une fois entendu, nous aurons

$$\rho=\frac{n^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)}{\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)},$$

valeur qui reproduit celle que nous avons obtenue au commencement de ce Mémoire, lorsqu'on y fait $\frac{1}{R'}=0$.

17. On a également

$$f\cos\psi=-dm\frac{V^2}{R^2}\,\frac{\cos\psi\left[\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}},$$

$$F=M\frac{V^2}{R^2}\left[1-\frac{1}{M\left(1+\frac{R}{R'}\right)}\sum dm\cos^2\psi\right],$$

expressions dont nous avons étudié déjà un cas particulier. Elles donneront lieu à une discussion analogue, mais avec des circonstances plus variées, à cause du nouvel élément introduit dans la question.

Les points pour lesquels $f=0$ ont pour lieu géométrique la circonférence de cercle dont la relation

$$\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=0$$

est l'équation polaire. Pour tous les points extérieurs, et d'un même côté de la tangente en C, la quantité $\cos\psi-n\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ est négative et $f\cos\psi$ positif. Dans l'intérieur de cette circonférence, et de l'autre côté de la tangente, le contraire a lieu. Le diamètre de celle-ci est moindre que le rayon R. Sa valeur

$$\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}} = \frac{R}{1+\frac{R}{R'}}$$

diminue en même temps que R′.

18. Si nous écrivons

$$F = kM.\frac{V^2}{R},$$

on voit que le coefficient k augmente à mesure que R′ diminue. Sa valeur, lorsque R′ est donnée, atteint son maximum et reste la même pour les points du mobile dont la distance à l'essieu atteint ou dépasse celle qui sépare celui-ci de l'axe instantané de rotation. On devra donc, dans les applications, établir une distinction fondée sur la distance des différents points du solide à son axe de figure; les formules à employer pour l'intégration différeront suivant que cette distance sera moindre ou plus grande que R.

19. Lorsque R′ est négatif, c'est-à-dire lorsque le centre de courbure du chemin et l'essieu du mobile se trouvent d'un même côté par rapport à l'axe instantané, on a

$$f\cos\psi = -\,dm.\frac{V^2}{R}.\frac{\cos\psi\left[\cos\psi - n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)\right]}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}},$$

et

$$F = M.\frac{V^2}{R}\left[1 - \frac{1}{M\left(1-\frac{R}{R'}\right)}\sum dm.\cos^2\psi\right].$$

Tant que l'on a $R' > R$, le lieu géométrique des points pour lesquels on a $f\cos\psi = 0$ est une circonférence de cercle dont l'équation polaire est

$$\cos\psi - n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) = 0,$$

et dont le diamètre

$$\frac{1}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}}=\frac{R}{1-\frac{R}{R'}}$$

est constamment supérieur à R. Il augmente à mesure que le rapport $\frac{R}{R'}$ approche de devenir égal à l'unité. Lorsque cette circonstance arrive, la circonférence embrasse toutes les parties de l'espace situées d'un même côté de la tangente au point de contact de la roue avec le chemin. La valeur de $\cos\psi$ demeurant positive pour tout point compris dans le lieu géométrique, et celle de $\cos\psi - n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)$ demeurant aussi positive, celle de $f\cos\psi$ est négative. Elle l'est également pour tous les points qui se trouvent de l'autre côté de la tangente, tandis que dans tout autre lieu de l'espace on a $f\cos\psi > 0$.

Quant à la valeur de F, dans le cas qui nous occupe, elle peut être positive, nulle ou négative, suivant la valeur du rapport $\frac{R}{R'}$. Lorsque $\frac{R}{R'}=1$, le coefficient k devient l'infini négatif. Mais alors aussi, comme on a nécessairement $V=0$, il en résulte $F=0$.

20. Lorsque R surpasse R', l'équation polaire

$$\cos\psi + n\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)=0$$

est encore celle d'une circonférence de cercle qui ne se trouve plus du même côté que l'essieu par rapport à l'axe instantané. Son diamètre

$$\frac{1}{\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}}=\frac{R}{\frac{R}{R'}-1}$$

diminue avec R'. Pour tous les points qui s'y trouvent renfermés, la valeur de $\cos\psi + n\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)$ est négative, et celle de $\cos\psi$ l'est aussi. On a donc $f\cos\psi < 0$ pour ces points. Il en est de même pour ceux qui se trouvent avec l'essieu de l'autre côté de la tangente. Les autres donnent $f\cos\psi > 0$.

A l'égard de F, on remarquera que le facteur

$$k = 1 + \frac{1}{M\left(\frac{R}{R'} - 1\right)} \sum \cos^2\psi . dm,$$

susceptible, pour chaque valeur de R', d'un maximum analogue à ceux des cas traités précédemment, varie en outre avec R' de manière à prendre telle valeur que l'on voudra au-dessus de l'unité. Ce n'est pas que l'on puisse rendre F aussi grand que toute quantité donnée, car nous avons vu que pour $R = R'$, k étant infini, F est cependant nul.

21. Notre Mémoire serait incomplet si, après avoir montré le rôle que jouent les forces centrifuges dans quelques cas particuliers, nous négligions d'appliquer des considérations analogues au mouvement le plus général d'un solide.

Le lecteur aura remarqué l'emploi continuel de l'axe instantané de rotation dans les relations que nous avions à établir. Cet axe devant être en quelque sorte la base de nos recherches, nous allons tâcher de le définir, et montrer comment on peut le découvrir lorsque le mouvement d'un solide est connu. Il suffira pour cela de rappeler quelques propositions fondamentales de la mécanique et de les ramener par des transformations convenables à des énoncés d'une forme plus appropriée au sujet que nous avons traité.

22. Les géomètres voient, dans le mouvement le plus général d'un corps solide, deux circonstances bien distinctes qui le caractérisent en chaque instant : *une translation dans une certaine direction et une rotation autour d'un certain axe*. L'illustre auteur de la *Mécanique analytique*, guidé par l'interprétation la plus naturelle des formules du mouvement, avait considéré la translation de tous les points du corps dans la direction où se meut son centre de gravité et leur rotation autour d'un axe passant par ce point, comme les éléments le plus simplement définis dans lesquels se décompose tout déplacement infiniment petit.

Dans ces derniers temps, M. Chasles a fait voir qu'il existe toujours pour un corps qui se déplace, une ligne droite qui, si elle lui était attachée, ne ferait que glisser dans le sens de sa longueur; de manière que le mouvement, sous ce nouveau point de vue, se compose à chaque instant d'une translation et d'une rotation dans la direction et autour d'une même ligne. Le corps peut donc être représenté *comme un écrou tournant autour d'une vis*. Cette comparaison, due au même savant, donne également l'idée la plus claire de ce qui se passe; l'axe de la vis a été nommé *l'axe instantané de rotation*.

Les différents points d'un solide qui se meut parcourent donc à chaque instant des hélices ou plutôt des courbes qui leur sont tangentes et ont les mêmes plans osculateurs sans avoir les mêmes rayons de courbure. Toutefois ceux-ci sont dirigés perpendiculairement à l'axe instantané de rotation; et si nous revenons aux forces centrifuges, on voit qu'elles le sollicitent directement. De sorte que la connaissance de cet axe est d'abord indispensable pour se rendre compte du jeu des forces dues au mouvement général considéré seulement sous le rapport de la rotation, car nous montrerons que la translation qui l'accompagne est sans influence sur le résultat.

23. Admettons que le lecteur sait décomposer le mouvement en *translation du centre de gravité et rotation autour d'un axe passant par ce point;* et concevons le mobile partagé en filets à cette ligne. Tous les filets conserveront la même direction pendant le déplacement, et leurs projections sur un plan perpendiculaire à cette commune direction, formeront une figure plane invariable de forme mobile dans son propre plan. Or on sait (*Journal de Mathématiques,* tome III, page 488) que l'un des points d'une telle figure *demeure immobile pendant le mouvement*. A ce point correspond évidemment une file de molécules présentant les propriétés de l'axe instantané de rotation. Celui-ci peut se trouver en dehors du mobile, mais on doit en faire la recherche comme si tous les points de l'espace y étaient attachés invariablement.

Ceci bien compris, nommons V la vitesse du centre de gravité, ω la vitesse de rotation autour de l'axe relatif à ce point, et A l'angle compris entre cet axe et la direction de la vitesse V. Celle-ci, estimée suivant un plan perpendiculaire à l'axe, est donnée par l'expression $V \sin A$.

Il est aisé de voir que tous les points compris dans un plan normal à la projection de la trajectoire du centre de gravité se meuvent, par le seul effet de la rotation, dans des directions parallèles, perpendiculaires à ce plan, mais semblables ou opposées, selon la position des points que l'on considère. Parmi ceux qui prennent ainsi un mouvement contraire à celui du centre de gravité, abstraction faite de la translation dans le sens des filets parallèles, on distinguera spécialement le filet dont la distance R à l'axe de rotation a pour valeur

$$R = \frac{V \sin A}{\omega}$$

Les points qui le composent ayant d'une part, la vitesse V sin A du centre de gravité, et d'autre part, la vitesse $R\omega$ en sens contraire, ces deux vitesses s'annulent en vertu de la relation précédente. On en conclut que ces points sont situés sur l'*axe instantané de rotation*, tel que nous l'avons défini d'après l'idée de M. Chasles.

24. Conservant les dénominations adoptées au commencement de cet écrit, nous appellerons par les mêmes lettres affectées de l'indice zéro la force centrifuge, le rayon de courbure, et la vitesse de chaque point matériel, lorsqu'on fait abstraction du glissement le long de l'axe instantané. Nous aurons ainsi

$$f_0 = dm \frac{V_0^2}{\rho_0},$$

$$f = dm \frac{V^2}{\rho};$$

on a évidemment

$$v = \frac{V_0}{\sin A}.$$

A l'égard des rayons ρ, ρ_0, il existe entre eux une relation fort simple. Le petit arc auquel appartient le rayon ρ_0 est transformé sur une surface cylindrique du même rayon en arc d'hélice dont le rayon de courbure est donné par l'expression

$$\rho = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\sin A}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\sin^2 A}.$$

Substituant les valeurs de v et de ρ ainsi obtenues dans celle de f, il vient

$$f = dm \frac{V_0^2}{\rho_0}.$$

Ainsi l'*action des forces centrifuges est indépendante du glissement le long de l'axe instantané de rotation.*

25. Pour obtenir la résultante générale de ces actions, il n'y aura donc qu'à déterminer les rayons de courbure des trajectoires et la vitesse du centre de gravité du mobile, estimée suivant un plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation.

A cet effet, nous adopterons pour plans coordonnés :

1°. Le plan mené par le centre de gravité et par l'axe instantané;

2°. Le plan passant par l'axe instantané, perpendiculaire au premier;

3°. Enfin un plan perpendiculaire aux deux autres mené par le centre de gravité du mobile.

Les intersections de ce troisième plan avec le second et le premier seront prises pour axes des x et des z; l'axe des y sera l'axe de rotation.

Les composantes de la force centrifuge dont chaque point est animé seront alors dans le sens des axes des coordonnées

$$dm\frac{V^2}{\varrho}\sin\psi,\qquad dm\frac{V^2}{\varrho}\cos\psi,$$

pour les x et les z; elles sont nulles pour l'axe des y.

Leurs moments seront nuls pour les plans des xy et des zy. Mais pour le plan des xz, ils auront respectivement pour valeurs

$$dm\frac{V^2}{\varrho}y\sin\psi,\qquad dm\frac{V^2}{\varrho}y\cos\psi.$$

Les intégrales de ces différentes expressions donneront la grandeur et le point d'application de chacune des résultantes. Il arrivera, dans le cas le plus général, que les forces centrifuges produiront un couple tendant à dévier l'axe instantané de sa direction.

26. Les vitesses se déduiront de celle du centre de gravité ou plutôt de celle de sa projection sur le plan des xz; on aura pour tous les points la relation

$$v=\frac{V}{R}n.$$

Quant aux rayons de courbure, ils dépendront de la nature du mouvement imprimé au corps. Imaginons trois axes qui lui soient invariablement attachés et qui le suivent dans l'espace; si l'on conçoit qu'à chaque instant l'axe instantané de rotation soit rapporté à ces trois axes, on obtiendra un lieu géométrique des axes instantanés. Cette surface emportera avec elle le caractère particulier du mouvement; les lignes fixes auxquelles on la rattache pourront être choisies à volonté; les axes principaux de l'inertie qui passent par le centre de gravité simplifieront souvent, si on les adopte, cette recherche qui n'a rien en soi de compliqué.

D'autre part, il conviendra de rapporter à d'autres lignes fixes dans l'espace le lieu géométrique des axes instantanés de rotation. La seconde surface que l'on obtiendra de cette manière, permettra de représenter le mouvement tel qu'il aura eu lieu dans chaque instant. Il suffira de les mettre en contact suivant une génératrice qui soit la même sur les deux surfaces. La première, si elle applique successivement toutes ses génératrices sur celles de la seconde, en glissant le long de chacune d'elles d'une quantité convenable, prendra exactement les positions qu'elle doit occuper dans l'espace. Si l'on réalisait les deux lieux géométriques, en ayant soin de marquer sur chaque génératrice le point le plus rapproché du centre de gravité, la suite de ces points formerait pour chaque surface une courbe; on aurait l'exacte représentation du mouvement en maintenant le contact entre la surface mobile et la surface fixe, de manière que les deux courbes se coupent constamment sur l'axe instantané de rotation.

Telle est la marche à suivre pour analyser le mouvement d'un mobile dans le cas le plus général. Une fois ce résultat obtenu, il n'est pas difficile d'arriver aux rayons de courbure des trajectoires. Toutefois, ce problème ne pouvant être résolu qu'en traduisant en formules ce qui vient d'être dit, nous n'irons pas plus loin dans cette recherche.

27. Terminons par quelques mots sur les modifications que subissent nos formules, lorsque après avoir analysé le mouvement et déterminé l'axe instantané ainsi que les forces centrifuges dans un système, on reconnaît que ce système est entraîné tout entier dans une commune direction. Telle serait, pour la surface de la Terre, la rotation diurne de ce globe, combinée avec sa translation annuelle autour du Soleil, et même avec un mouvement général du système solaire. Concevons un point matériel mobile dans une circonférence autour d'un certain axe, et supposons que le centre de cette circonférence est emporté dans une certaine direction. On a démontré précédemment (**23**) qu'en nommant A l'angle compris entre l'axe de la rotation et la direction du mouvement imprimé au système, les autres dénominations étant d'ailleurs conservées, l'axe instantané se trouve à la distance

$$R = \frac{V \sin A}{\omega}$$

de l'axe donné; qu'il lui est parallèle et rencontre celui des diamètres de la circonférence qui est perpendiculaire à la projection faite sur son plan, de la trajectoire parcourue par son centre.

Nous avons vu que la valeur de R a une grande influence sur la valeur de la force F. Lorsqu'elle est très grande relativement aux dimensions du mobile que l'on considère, on a, à très peu près,

$$\sum dm \cos^2\psi = M:$$

et l'on conçoit que cette circonstance puisse contribuer à rendre insensibles les effets de la force F.

Ces conséquences ressortent mieux de la formule

$$F = M\frac{V^2}{R}\left(1 - \frac{1}{M}\sum dm \cos^2\psi\right),$$

lorsqu'on la met sous la forme

$$F = M\omega V \sin A\left(1 - \frac{1}{M}\sum dm \cos^2\psi\right).$$

En nous arrêtant ici, nous ne devons point dissimuler combien les conclusions de nos formules nous inspirent peu de confiance dans leur exactitude par leur singularité. En les publiant nous comptons que des esprits auxquels la mécanique sera plus familière, donneront l'explication de ce qu'il y a de paradoxal dans cet écrit. Nous avons été réservé sur les applications : quelque intérêt à cet égard que présente le système du monde, une semblable étude sortirait des limites de notre cadre : aussi ne faisons-nous que l'indiquer.
