JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. LOBATTO

Note sur l'évaluation de la surface totale de l'ellipsoïde à trois axes inégaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 115-119.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__115_0>

NOTE

SUR

L'ÉVALUATION DE LA SURFACE TOTALE DE L'ELLIPSOÏDE A TROIS AXES INÉGAUX;

PAR M. R. LOBATTO,

Docteur ès-sciences, à *La Haye*.

Dans un beau Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples, inséré dans ce Journal [*], M. *Catalan* a indiqué, à l'aide d'une considération géométrique, une nouvelle voie plus expéditive que celle suivie par *Legendre* et *Plana*, pour parvenir à l'expression analytique de la surface totale de l'ellipsoïde. En désignant par α, β, γ, les trois axes de ce solide, α étant supposé $> \beta > \gamma$, l'auteur a réduit la double intégrale qui exprime la huitième partie de la surface dont il s'agit, à l'intégrale simple

$$\alpha\beta \frac{\pi}{4} \int_1^\infty zd.\mathrm{XY},$$

où

$$\mathrm{X} = \sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-a^2}}, \quad \mathrm{Y} = \sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-b^2}}, \quad a^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \quad \text{et} \quad b^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}.$$

Je me propose de faire voir dans cette Note que l'analyse employée par M. *Catalan* pour obtenir la valeur de cette intégrale définie, pourrait être remplacée avec avantage par la suivante, qui semble plus simple, en ce qu'elle conduit directement aux deux transcendantes elliptiques d'où dépend la surface à évaluer.

En effet, après avoir transformé l'intégrale $\int zd.\mathrm{XY}$ en

$$z\mathrm{XY} - \int \mathrm{XY}\,dz = \frac{z(z^2-1)}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} - \int \frac{(z^2-1)\,dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}},$$

[*] Voir le numéro du mois de mars 1839, page 323.

il ne s'agira que d'effectuer cette dernière intégration entre les limites $z = 1$ et $z = \infty$. Pour cela il n'y a qu'à poser $z = \frac{a}{\sin\varphi}$, donc $dz = \frac{-a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.d\varphi$, ce qui changera la différentielle $\frac{-(z^2-1)\,dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}$ en

$$\left(\frac{a^2}{\sin^2\varphi} - 1\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\varphi)}} = \left[\frac{\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\varphi)}}{\sin^2\varphi} - \frac{(1-b^2)}{\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\varphi)}}\right] d\varphi.$$

Par ce changement de variable, l'intégrale fonction de z, se trouvera décomposée en

$$\int \frac{d\varphi\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\varphi)}}{\sin^2\varphi} - (1-b^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(a^2 - b^2\sin^2\varphi)}},$$

chacune de celles-ci devant être prise depuis $\sin\varphi = a$ jusqu'à $\sin\varphi = 0$. En renversant ces limites, et posant pour simplifier, $\frac{b}{a} = c$, $a = \sin\mu$, l'expression précédente devient

$$\frac{1-b^2}{a}\int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} - a\int_0^\mu \frac{d\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}{\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1-b^2}{a}\int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} + a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$$

$$+ ac^2\int_0^\mu \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}} \text{ (en intégrant par parties)}$$

$$= a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} + \frac{1}{a}\int_0^\mu \frac{(1-a^2c^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}d\varphi$$

$$= a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} + a\int_0^\mu \sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi$$

$$+ \frac{1-a^2}{a}\int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$$

$$= a\cot\varphi\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} + a\mathrm{E}(c,\mu) + \left(\frac{1-a^2}{a}\right)\mathrm{F}(c,\mu).$$

Il reste maintenant à évaluer entre les limites relatives à chacune des deux variables z, φ, la somme des quantités

$$\frac{(z^2-1)z}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}, \quad a\cot\varphi\,\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}.$$

En exprimant la première en fonction de φ, il s'agira de chercher entre les limites $\varphi = 0$ et $\sin\varphi = a$, la différence

$$a\cot\varphi\,\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)} - \frac{a^2-\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}},$$

qui se réduit facilement à

$$\frac{(1-a^2-b^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos\varphi\sqrt{(a^2-b^2\sin^2\varphi)}}.$$

Cette valeur devenant nulle à la première limite, il faudra seulement y substituer $\sin\varphi = a$, ce qui la changera en

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)a}{a\sqrt{(1-a^2)}\sqrt{(1-b^2)}} = \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)};$$

d'où l'on tire enfin, pour l'expression de la surface totale de l'ellipsoïde,

$$2\alpha\beta\pi\left[\sqrt{(1-a^2)}\,\sqrt{(1-b^2)} + a\mathrm{E}(c,\mu) + \frac{1-a^2}{a}\mathrm{F}(c,\mu)\right]$$
$$= 2\pi\gamma^2 + \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}\left[(\alpha^2-\gamma^2)\mathrm{E}(c,\mu) + \gamma^2\mathrm{F}(c,\mu)\right],$$

valeur qui coïncide parfaitement avec celle donnée dans le susdit Mémoire.

Je me permettrai encore d'indiquer ici un moyen plus simple que celui employé par l'auteur, pour parvenir aux valeurs des deux intégrales définies

$$\mathrm{A}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi\,\sqrt{(1-a^2\sin^2\varphi)}, \quad \mathrm{A}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi\sqrt{(1-a^2\sin^2\varphi)},$$

traitées à la page 335 de son Mémoire.

Si l'on fait $\cos\varphi = x$, la première se change immédiatement en

$$\int_0^1 dx\,\sqrt{(1-a^2+a^2x^2)} = a\int_0^1 dx\,\sqrt{(m^2+x^2)},$$

en posant $$\frac{1-a^2}{a} = m^2.$$

Or, puisqu'on a

$$\int dx\,\sqrt{(m^2+x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(m^2+x^2)} + \frac{m^2}{2}\,\mathrm{l}.\left(x+\sqrt{x^2+m^2}\right),$$

il en résulte

$$\int_0^1 dx\sqrt{(m^2+x^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+1)} + \frac{m^2}{2}\,\mathrm{l}.\left(\frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\mathrm{l}.\frac{1+a}{\sqrt{(1-a^2)}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1-a^2}{a^2}\,\mathrm{l}.\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right). \end{aligned}$$

Quant à la seconde de ces intégrales, elle se transforme successivement en

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi\,\sqrt{(1-a^2\sin^2\varphi)} \\ &= A_1 - a\int_0^1 x^2\,dx\,\sqrt{(m^2+x^2)}. \end{aligned}$$

Or, d'après une formule générale, on a

$$\int x^2\,dx\,\sqrt{(m^2+x^2)} = \frac{x\,(x^2+m^2)^{\frac{3}{2}} - m^2\int dx\,\sqrt{m^2+x^2}}{4};$$

par conséquent,

$$a\int_0^1 x^2\,dx\,\sqrt{(m^2+x^2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} - m^2A_1\right).$$

Substituant dans la valeur de A_3, on en déduira sur-le-champ

$$A_3 = \left(1 + \frac{1}{4}m^2\right)A_1 - \frac{1}{4a^2} = \left(\frac{3a^2+1}{4a^2}\right)A_1 - \frac{1}{4a^2}$$

$$= \frac{3a^2-1}{8a^2} + \frac{(1-a^2)(3a^2+1)}{8a^2}\,\mathrm{l}.\sqrt{\frac{1+a}{1-a}},$$

résultat qui s'accorde avec celui obtenu par M. *Catalan,* à l'exception du premier terme, pour lequel ce géomètre a trouvé, par une erreur de calcul, $\frac{3a^2-2}{8a^2}$.