

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

E. CATALAN

**Solution nouvelle de cette question: un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 4 (1839), p. 91-94.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1839\\_1\\_4\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_91_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

PAR E. CATALAN. (\*).

Soit ABCD...XYZA, un polygone convexe de  $n + 1$  côtés, et soit désigné par  $P_{n+1}$  le nombre total des décompositions de ce polygone.

Parmi ces décompositions, il y en a qui renferment le triangle ABC : leur nombre est  $P_n$ .

Il y en a qui renferment le triangle BCD : elles sont toutes distinctes des précédentes, et leur nombre est pareillement  $P_n$ .

A ces deux groupes, nous devons ajouter :

1°. Les décompositions du polygone de  $n$  côtés CEF...ZABC, dans lesquelles n'entre pas le triangle ABC; je désigne leur nombre par  $P_{n,1}$ ;

2°. Les décompositions de DFG...ABCD, dans lesquelles n'entrent pas les deux triangles consécutifs ABC, BCD; je désigne leur nombre par  $P_{n,2}$ ;

3°. Les décompositions de EGH...BCDE, dans lesquelles n'entrent pas les trois triangles consécutifs ABC, BCD, CDE; leur nombre est  $P_{n,3}$ ;

.....  
 (n - 2)°. Enfin, les décompositions du polygone de  $n$  côtés ZBCD...XYZ, dans lesquelles n'entrent pas les  $n - 2$  triangles consécutifs BCD, CDE,..... XYZ : leur nombre est  $P_{n,n-2}$ .

En réunissant ces décompositions, nous obtiendrons toutes celles

(\*) Cette solution est trouvée depuis le mois de novembre dernier. Comme on en a de plus simples, je ne me serais pas décidé à la publier, si, par une coïncidence assez remarquable, M. BINET n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).

du polygone proposé, sans qu'il y en ait d'omises ou de répétées; donc

$$P_{n+1} = P_n + P_n + P_{n,1} + P_{n,2} + \dots + P_{n,n-2}. \quad (1)$$

Désignons actuellement par  $P_{k,l}$  le nombre des décompositions d'un polygone de  $k$  côtés,  $abcd \dots lmnopq \dots xyz$ , dans lesquelles n'entrent pas  $l$  triangles consécutifs  $abc, bcd, cde, \dots mnp$ .

Il est facile de s'assurer que l'on obtiendra ces décompositions si l'on ajoute, à celles qui ne contiennent pas les  $l+1$  triangles  $abc, bcd, \dots mnp, npq$ , toutes les décompositions du polygone de  $k-1$  côtés  $abcd \dots lmnq \dots xyz$ , dans lesquelles n'entrent pas les  $l-1$  triangles consécutifs  $abc, bcd, \dots lmn$ : on a donc

$$P_{k,l} = P_{k,l+1} + P_{k-1,l-1};$$

ou, en changeant  $l$  en  $l-1$ :

$$P_{k,l} = P_{k,l-1} - P_{k-1,l-2}. \quad (2)$$

Pour intégrer cette équation linéaire du second ordre, aux différences finies et partielles à trois variables, on pourrait employer les méthodes de Lagrange ou celles de Laplace (\*); mais on parviendra plus facilement au résultat, de la manière suivante.

Changeons  $l$  en  $l-1, l-2, \dots 4, 3, 2$ , et ajoutons les équations résultantes; nous obtiendrons

$$P_{k,l} = P_{k,l} - [P_{k-1,l-2} + P_{k-1,l-3} + \dots + P_{k-1,1} + P_{k-1,0}]. \quad (3)$$

Si, dans cette nouvelle équation, on suppose successivement  $l=1, l=2, l=3, \dots$  et si l'on observe avec un peu d'attention les résultats, on trouve qu'ils peuvent se mettre sous cette forme,

$$\begin{aligned} P_{k,1} &= P_{k,1}, \\ P_{k,2} &= [P_{k,1}] - [P_{k-1,0}], \\ P_{k,3} &= [P_{k,1} - P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0}], \\ P_{k,4} &= [P_{k,1} - 2P_{k-1,1}] - [P_{k-1,0} - P_{k-2,0}], \end{aligned}$$

---

(\*) Lagrange, *Mémoires de Berlin*, année 1775, page 183; Laplace, *Académie des Sciences, Savants étrangers*, tome VII, année 1773.

$$\begin{aligned} P_{k,5} &= [P_{k,1} - 3P_{k-1,1} + P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 2P_{k-2,0}], \\ P_{k,6} &= [P_{k,1} - 4P_{k-1,1} + 3P_{k-2,1}] - [P_{k-1,0} - 3P_{k-2,0} + P_{k-3,0}], \\ P_{k,7} &= [P_{k,1} - 5P_{k-1,1} + 6P_{k-2,1} - 3P_{k-3,1}] - [P_{k-1,0} - 4P_{k-2,0} + 3P_{k-3,0}], \text{ etc.} \end{aligned}$$

Et en général :

1°. Si  $l$  est pair, et  $= 2i$  :

$$P_{k,l} = \left\{ \begin{aligned} & \left[ P_{k,1} - \frac{2i-2}{1} P_{k-1,1} + \frac{2i-3}{1} \frac{2i-4}{2} P_{k-2,1} - \dots \pm \frac{i}{1} P_{k-i+1,1} \right] \\ & - \left[ P_{k-1,0} - \frac{2i-3}{1} P_{k-2,0} + \frac{2i-4}{1} \frac{2i-5}{2} P_{k-3,0} - \dots \pm P_{k-i,0} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2°. Si  $l$  est impair, et  $= 2i + 1$  :

$$P_{k,l} = \left\{ \begin{aligned} & \left[ P_{k,1} - \frac{2i-1}{1} P_{k-1,1} + \frac{2i-2}{1} \frac{2i-3}{2} P_{k-2,1} - \dots \mp P_{k-i,1} \right] \\ & - \left[ P_{k-1,0} - \frac{2i-2}{1} P_{k-2,0} + \frac{2i-3}{1} \frac{2i-4}{2} P_{k-3,0} - \dots \pm P_{k-i,0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

On vérifie aisément que ces valeurs de  $P_{k,l}$  satisfont, suivant que  $l$  est pair ou impair, à l'équation (2). D'ailleurs, elles contiennent deux fonctions arbitraires : elles sont donc bien, l'une ou l'autre, l'intégrale générale de cette équation.

Dans le problème dont il s'agit, on a  $P_{k,0} = P_k$  : en effet, si dans le polygone de  $k$  côtés, nous n'omettons aucun triangle, nous devons trouver toutes les décompositions. En même temps, si l'on ajoute aux décompositions qui contiennent le triangle  $abc$ , celles qui ne le contiennent pas, on les obtiendra toutes ; ainsi  $P_{k-1} + P_{k,i} = P_k$ , ou

$$P_{k,i} = P_k - P_{k-1}. \quad (6)$$

Remplaçant donc, dans les équations (4) et (5),  $P_{k,0}$  par  $P_k$ , et  $P_{k,1}$  par sa valeur, il viendra, en confondant en une seule les deux formules,

$$P_{k,l} = P_k - \frac{l}{1} P_{k-1} + \frac{l-1}{1} \frac{l-2}{2} P_{k-2} - \dots \quad (7)$$

Le second membre s'arrête de lui-même.

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} P_{n-1} - \dots = 0. \quad (8)$$

Si  $n = 2i$ , le second membre se termine par  $\mp \frac{i+1}{1} P_{i+1}$ ; et si  $n = 2i + 1$ , par  $\pm P_{i+1}$ . On voit que cette équation se déduit de la précédente, en y faisant  $k = n + 1$  et  $l = n$ .

En rapprochant le mode de décomposition qui vient d'être employé, de celui qui avait été donné d'abord par *Ségnér*, et de la formule trouvée probablement par *Euler*, on arrive à cette conséquence remarquable, savoir que les trois équations,

$$P_{n+1} - \frac{n}{1} P_n + \frac{n-1}{1} \frac{n-2}{2} P_{n-1} - \dots = 0, \quad (A)$$

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1} P_3 + P_{n-2} P_4 + \dots + P_3 P_{n-1} + P_n, \quad (B)$$

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n, \quad (C)$$

donneront pour  $P_{n+1}$  la même valeur numérique, pourvu que l'on suppose dans les deux dernières,  $P_3 = 1$ , et dans la première,  $P_3 = 1$  et  $P_4 = 2$ .