JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 7-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__7_0>

NOTE

Sur la Théorie des Nombres ;

PAR E. CATALAN.

I.

THÉORÈME. « N étant un nombre entier quelconque, dont les diviseurs sont d, d', d'',..., et $\varphi(n)$ désignant généralement le nombre des facteurs premiers avec n, et plus petits que n, on a

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots = \mathrm{N}. \text{ »}$$

Démonstration (*). Soit $\mathrm{N} = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, a, b, c,... désignant les facteurs premiers de N. En appelant d un quelconque des diviseurs de N, on pourra le représenter par $a^i b^k c^l \ldots$, expression dans laquelle les exposants i, k, l,... peuvent varier respectivement de o à α, de o à β, de o à γ, etc. Par une formule connue,

$$\varphi(d) = d \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \ldots = a^{i-1}(a-1) \times b^{k-1}(b-1) \times c^{l-1}(c-1) \times \ldots,$$

chacun des facteurs de ce dernier produit étant remplacé par l'unité, lorsque l'exposant qui s'y trouve est -1 ; la somme $\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots$ sera donc égale au produit des quantités

$$1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \ldots + a^{\alpha-1}(a-1),$$
$$1 + (b-1) + b(b-1) + b^2(b-1) + \ldots + b^{\beta-1}(b-1),$$
$$1 + (c-1) + c(c-1) + c^2(c-1) + \ldots + c^{\gamma-1}(c-1), \text{ etc.},$$

(*) On en trouve une autre dans la 2me section des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

de sorte qu'en supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots = \text{N}. \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

II.

En mettant la fonction $(1+t+t^2+\ldots+t^{m-1})^\mu$, sous la forme $(1-t^m)^\mu\ (1-t)^{-\mu}$, on trouve que le coefficient de t^s, dans le développement de cette fonction, peut être exprimé par

$$k = \sum\nolimits_0^q (-1)^i \cdot \text{C}_{\mu,i} \cdot \text{C}_{s-im+\mu-1,\ \mu-1}:$$

dans cette formule, q représente le quotient entier de s par m, et $\text{C}_{n,p}$ désigne généralement le nombre des combinaisons de n lettres, prises p à p.

Prenons $s = (m-1)\mu$: le coefficient k deviendra l'unité; donc

$$\text{(A)} \qquad 1.2.3\ldots(\mu-1) = \sum\nolimits_0^q (-1)^i \text{C}_{\mu,i} \cdot \text{P}_{m(\mu-i)-1,\ \mu-1},$$

$\text{P}_{m(\mu-i)-1,\ \mu-1}$ désignant le nombre des arrangements de $m(\mu-i)-1$ lettres, prises $\mu-1$ à $\mu-1$.

Cette équation se simplifie dans le cas de $m>\mu$. En effet, le quotient exact de s par m étant $\frac{(m-1)\mu}{m} = \mu - \frac{\mu}{m}$, le quotient entier q se réduit alors à $\mu-1$. Donc

$$\text{(B)} \qquad 1.2.3\ldots(\mu-1) = \sum\nolimits_0^{\mu-1} (-1)^i \cdot \text{C}_{\mu,i} \cdot \text{P}_{m(\mu-i)-1,\ \mu-1}.$$

Les réductions exprimées par les équations (A) et (B) sont assez remarquables: on a par exemple, en prenant $m=8$ et $\mu=5$,

$$1.2.3.4 = 1.39.38.37.36 - \frac{5}{1}.31.30.29.28 + \frac{5.4}{1.2}.23.22.21.20$$
$$- \frac{5.4}{1.2}.15.14.13.12 + \frac{5}{1}.7.6.5.4.$$