JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. A. LEBESGUE

Détermination des centres de gravité des fuseaux et des onglets de révolution

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 60-62.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__60_0>

Détermination des centres de gravité des fuseaux et des onglets de révolution;

Par V. A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans tout solide de révolution, le centre de gravité d'un fuseau, ou surface comprise entre deux méridiens et deux parallèles, et celui d'un onglet, ou volume compris entre les mêmes plans et le fuseau, sont situés sur le méridien qui divise l'angle du fuseau ou de l'onglet en deux parties égales; il suffit donc de connaître leur projection sur l'axe et leur distance à cet axe.

Soit $u=\varphi x$, la génératrice plane d'une surface de révolution, dont l'axe est celui des x; soit S la surface d'un fuseau, et V le volume d'un onglet d'angle 2λ et compris entre les deux parallèles, ayant pour équations l'un $x=\alpha$, l'autre $x=\beta$. Si l'on représente par x_1 la distance à l'origine des coordonnées, de la projection du centre de gravité du fuseau, par u_1 la distance de ce centre à l'axe des x, et par X_1 et U_1 les quantités correspondantes pour l'onglet, on aura

$$S=2\lambda\int_\alpha^\beta uds \;(1),\quad Sx_1=2\lambda\int_\alpha^\beta uxds \;(2),\quad Su_1=2\sin\lambda\int_\alpha^\beta u^2ds \;(3),$$
$$V=\lambda\int_\alpha^\beta u^2dx \;(4),\quad VX_1=\lambda\int_\alpha^\beta u^2xdx \;(5),\quad VU_1=\tfrac{2}{3}\sin\lambda\int_\alpha^\beta u^3dx \;(6).$$

Les formules (1), (2), (4), (5), sont démontrées dans tous les traités de Mécanique: voici la démonstration des deux autres.

Si l'on prend pour plan des zx celui qui divise l'angle du fuseau en deux parties égales, le z_1 de la formule générale........ $Sz_1=\iint zdxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$, devient égal à u_1: or l'équation de la surface de révolution est $z^2+y^2=(\varphi x)^2=u^2$, d'où $q=\frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}$, $p=\frac{dz}{dx}=\frac{u}{z}\cdot\frac{du}{dx}$; ainsi $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{u}{z}\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}=\frac{uds}{zdx}$,

ds étant la différentielle de l'arc de la courbe génératrice. On a donc $Su_1 = \int\int u dy ds = \int(\int dy) u ds$; or on voit de suite que l'intégrale $\int dy$ doit être prise depuis $-u\sin\lambda$ jusqu'à $u\sin\lambda$, ce qui donne $Su_1 = 2\sin\lambda\int u^2 ds$; il reste à intégrer par rapport à x depuis $x=\alpha$, jusqu'à $x=\beta$: donc $Su_1 = 2\sin\lambda\int_\alpha^\beta u^2 ds$, où $u=\varphi x$, $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2}$.

Quant à la formule $Vz_1 = \int\int\int z dx dy dz$, elle devient........ $VU_1 = \int(\int\int z dy dz) dx$: or, on reconnaît dans l'intégrale double $\int\int z dy dz$, prise entre les limites convenables, la somme des éléments du secteur que l'on obtient en coupant l'onglet par un parallèle, multipliés par leur distance au diamètre perpendiculaire à celui qui diviserait le secteur en deux parties égales. Cette intégrale égale donc le secteur circulaire, multiplié par la distance de son centre de gravité à l'axe des x. Or, comme il est facile de le voir, le secteur égale $u^2\lambda$, la distance de son centre à l'axe est $\frac{2}{3}\frac{u\sin\lambda}{\lambda}$; on a donc $\frac{2}{3}\sin\lambda u^3$ pour valeur de l'intégrale double, d'où la formule $VU_1 = \frac{2}{3}\sin\lambda\int_\alpha^\beta u^3 dx$.

Ces formules montrent presque immédiatement que si l'on a calculé la position du centre de gravité d'un fuseau S et d'un onglet V d'angle 2λ, une simple proportion suffira pour avoir celui d'un autre fuseau S′ et d'un autre onglet V′, d'angle différent 2μ, mais compris entre les mêmes parallèles.

En effet, si l'on élimine S entre (1) et (2), et V entre (4) et (5), l'angle λ disparaît; ainsi x_1 et X_1 restent les mêmes, quel que soit l'angle du fuseau, pourvu que les limites α et β ne varient point.

Quant à u_1 et U_1, on trouve

$$u_1 = \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^2 ds}{\int_\alpha^\beta u ds},\quad U_1 = \frac{2}{3}\,\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^3 dx}{\int_\alpha^\beta u^2 dx}.$$

Pour un autre fuseau et un autre onglet d'angle 2μ, on aurait semblablement, si α, β, restent les mêmes,

$$u_1' = \frac{\sin\mu}{\mu}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^2 ds}{\int_\alpha^\beta u ds},\quad U_1' = \frac{2}{3}\,\frac{\sin\mu}{\mu}\cdot\frac{\int_\alpha^\beta u^3 dx}{\int_\alpha^\beta u^2 dx},$$

d'où les proportions

$$u_1 : u_1' :: U_1 : U_1' :: \frac{\sin\lambda}{\lambda} : \frac{\sin\mu}{\mu};$$

c'est-à-dire que la distance du centre de gravité du fuseau, ou de l'onglet, à l'axe de révolution, varie comme le rapport $\frac{2\sin\lambda}{2\lambda}$, de la corde $2\sin\lambda$ à l'arc 2λ. Cette proposition se démontre très facilement *à priori* par la considération des infiniment petits.

Exemples. Si l'on considère la demi-surface sphérique comme un fuseau d'angle π engendré par la révolution d'une demi-circonférence, on aura $\lambda = \frac{\pi}{2}$, $u_1 = \frac{1}{2}r$, car on peut aussi regarder cette surface comme une zone ayant pour hauteur le rayon r de la sphère; la proportion donnera donc $u_1 = \frac{1}{4}\pi r . \frac{\sin\mu}{\mu}$, pour la distance à l'axe du centre de gravité d'un fuseau entier, d'angle 2μ.

Pour l'onglet on trouverait $U_1 = \frac{3}{16}\pi r . \frac{\sin\mu}{\mu}$, en le décomposant en pyramides infiniment petites, ayant pour sommet le centre de la sphère.

Pour le demi-fuseau et le demi-onglet engendrés par la révolution d'un quart de cercle, u_1 et U_1 ne changeront pas; mais on aura $x_1 = \frac{1}{2}r$, $X_1 = \frac{3}{8}r$, tandis qu'on avait dans le premier cas $x_1 = 0$, $X_1 = 0$.

Pour le triangle sphérique trirectangle, et pour la pyramide sphérique correspondante, il faut faire $\mu = \frac{\pi}{4}$, d'où

$$x_1 = \frac{1}{2}r \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{2}r\sqrt{2}, \quad X_1 = \frac{3}{8}r \quad \text{et} \quad U_1 = \frac{3}{8}r\sqrt{2}.$$

Cela se vérifie immédiatement, car pour le triangle sphérique trirectangle, le centre de gravité est sur chacun des plans perpendiculaires au milieu des rayons menés du centre de la sphère aux sommets du triangle, de là on tire x_1 et u_1, puis X_1 et U_1 par le raisonnement connu pour passer de la zone au secteur sphérique.