JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MOLINS

Démonstration de la formule générale qui donne les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 509-515.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__509_0>

Démonstration de la formule générale qui donne les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré;

Par M. MOLINS.

Cramer et Bezout, qui se sont occupés de l'élimination au premier degré, ont les premiers donné cette formule générale à laquelle ils n'étaient arrivés que par analogie, mais que depuis Laplace a démontrée *à priori* dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1772. M. Gergonne a présenté avec quelques développements et perfectionné la théorie de Laplace dans le tome quatrième des *Annales des Mathématiques*. La démonstration que nous proposons procède par voie d'extension ou de généralisation; on suppose la formule exacte pour n équations du premier degré renfermant n inconnues, et l'on fait voir qu'elle convient également à $n+1$ équations qui contiennent $n+1$ inconnues.

Avant d'exposer la démonstration, il est essentiel de bien préciser en quoi consiste la loi de formation du numérateur et du dénominateur de la valeur de chaque inconnue. Supposons que l'on ait $n+1$ équations à résoudre, et représentons les coefficients des inconnues dans l'une d'elles par $a, b, c, \ldots f, h$, et dans les autres équations par les mêmes lettres affectées d'un certain indice; soient k, k_1, $k_2, \ldots k_n$, les termes tout connus qui forment les seconds membres. Que l'on fasse le produit des quantités $a, b, c, \ldots f, h$, et qu'on forme toute les permutations dont elles sont susceptibles, on produira nécessairement des *inversions* de lettres, c'est-à-dire qu'il arrivera que des lettres qui en précédaient d'autres dans l'ordre de l'alphabet, seront précédées par elles dans certaines permutations. D'ailleurs il n'y a pas de difficulté pour évaluer le nombre des inversions qui peuvent être produites dans chaque cas; ainsi quand on n'a que trois lettres a, b, c, les permutations acb, bac ne présentent qu'une inversion, *bca*, *cab* en présentent deux, *cba* en présente trois, et enfin *abc* n'en présente aucune. En un mot, pour évaluer le nombre des inversions qu'offre une permutation quelconque, il faut comparer chaque lettre successivement à toutes les autres pour voir si son rang par rapport à ces dernières détermine une inversion; mais en passant d'une lettre à une autre, il faut avoir soin de ne plus compter la première.

Cela posé, le dénominateur commun aux valeurs des inconnues s'obtient en formant toutes les permutations possibles avec les $n+1$ lettres $a, b, c, \ldots f, h$, affectant dans chaque permutation la seconde lettre de l'indice 1, la troisième de l'indice 2,... la dernière de l'indice n, et faisant précéder d'un des signes $\pm$ toutes les permutations qui offrent un nombre d'inversions de même parité, et du signe contraire toutes celles qui offrent un nombre d'inversions d'une parité différente de la première. Par exemple, on pourra affecter du signe $+$ toutes les permutations qui présentent un nombre pair d'inversions, et du signe $-$ toutes celles qui en présentent un nombre impair.

Quant au numérateur de chaque inconnue, il se forme à l'aide du dénominateur commun, en y remplaçant la lettre qui représente son coefficient par la quantité toute connue k, et laissant les accents et les signes aux mêmes places qu'avant le changement de lettres.

Maintenant prenons les équations proposées qui sont:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + \ldots + fu + hv = k, \\ a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + f_1u + h_1v = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + f_2u + h_2v = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + f_nu + h_nv = k_n; \end{array}\right.$$

Appliquons-leur la méthode de résolution par les indéterminées, qui consiste à multiplier ces équations, moins la dernière, par des quantités indéterminées $m, m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$, et à ajouter les résultats à l'équation qui n'a pas été multipliée; ainsi pour obtenir la valeur de x, multiplions les n premières équations respectivement par $m, m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$, et ajoutons les produits à la dernière équation, en ayant soin d'égaler à zéro les coefficients de y, z,... u, v; il vient

$$x=\frac{mk+m_1k_1+m_2k_2+\ldots+m_{n-1}k_{n-1}+k_n}{ma+m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_{n-1}a_{n-1}+a_n},$$

les quantités m, m_1, m_2,... m_{n-1}, étant déterminées par les équations suivantes :

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l} mb+m_1b_1+m_2b_2+\ldots+b_n=0,\\ mc+m_1c_1+m_2c_2+\ldots+c_n=0,\\ md+m_1d_1+m_2d_2+\ldots+d_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ mh+m_1h_1+m_2h_2+\ldots+h_n=0. \end{array}\right.$$

Ces équations sont en nombre n, et l'on pourra par conséquent leur appliquer la loi qu'il s'agit de démontrer, car on la suppose exister pour n équations à n inconnues.

Pour rendre ces équations plus aisément comparables aux équations (1), nous les représenterons comme il suit :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l} \alpha m+\beta m_1+\gamma m_2+\ldots+\varphi m_{n-1}=\chi,\\ \alpha_1 m+\beta_1 m_1+\gamma_1 m_2+\ldots+\varphi_1 m_{n-1}=\chi_1,\\ \alpha_2 m+\beta_2 m_1+\gamma_2 m_2+\ldots+\varphi_2 m_{n-1}=\chi_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-1}m+\beta_{n-1}m_1+\gamma_{n-1}m_2+\ldots+\varphi_{n-1}m_{n-1}=\chi_{n-1}, \end{array}\right.$$

ce qui suppose l'ensemble des notations suivantes :

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l} \alpha=b,\ \ \beta=b_1,\ \ \gamma=b_2\ldots,\ \varphi=b_{n-1},\ \chi=-b_n,\\ \alpha_1=c,\ \ \beta_1=c_1,\ \ \gamma_1=c_2\ldots,\varphi_1=c_{n-1},\ \chi_1=-c_n,\\ \alpha_2=d,\ \ \beta_2=d_1,\ \ \gamma_2=d_2\ldots,\varphi_2=d_{n-1},\ \chi_2=-d_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-1}=h,\ \beta_{n-1}=h_1,\ \gamma_{n-1}=h_2\ldots,\varphi_{n-1}=h_{n-1},\ \chi_{n-1}=-h_n. \end{array}\right.$$

On remarquera que dans ce tableau les lettres françaises rangées verticalement sont toutes différentes et sont affectées d'un même indice, tandis que les colonnes verticales correspondantes de lettres grecques sont formées chacune de la même lettre affectée de divers indices

C'est l'inverse pour les lignes horizontales : sur chaque colonne horizontale la lettre française reste la même et est diversement accentuée, tandis que les lettres grecques sont différentes, mais affectées du même indice. La considération de ce tableau est indispensable dans la démonstration actuelle.

Ce qu'il faut faire voir, c'est que la loi énoncée plus haut étant applicable aux équations (3) qui sont en nombre n, l'est aussi aux équations (1) qui sont en nombre $n+1$. La seconde partie de la loi est évidente, d'après la forme de la valeur de x, car il est clair que le numérateur ne diffère du dénominateur qu'en ce que les quantités $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont remplacées par $k, k_1, k_2 \ldots, k_n$. Il suffit donc de démontrer la loi de composition du dénominateur commun. Pour cela, nous allons d'abord établir que le dénominateur renferme toutes les permutations des lettres $a, b, c \ldots f, h$, affectées de divers indices.

Remarquons qu'un terme quelconque du dénominateur de x pourra être représenté par $a_p\, m_p$, p étant moindre que n; en outre m_p sera déterminé par les équations (3) à l'aide de la loi de formation qui leur est applicable, et un terme quelconque du dénominateur de m_p étant une permutation des lettres $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \varphi$, diversement accentuées, il s'ensuit que le terme correspondant du numérateur de m_p sera cette même permutation dans laquelle on remplacera par la lettre χ celle qui représente le coefficient de m_p, et que nous désignerons par τ. Le rang de cette lettre τ parmi les autres lettres grecques, est marqué par $p+1$; nous désignerons par n' l'indice dont cette lettre est affectée dans la permutation que nous considérons, et par t la lettre française qui correspond à cet indice n'; le rang de la lettre t parmi les lettres françaises $b, c, d \ldots, h$ sera marqué par $n'+1$, en vertu du tableau (4). Il suit de là qu'un terme quelconque du dénominateur de x sera représenté par $\pm a_p \alpha \beta \gamma \ldots \chi_{n'} \ldots \varphi$, résultat dans lequel les lettres grecques $\alpha, \beta, \ldots \varphi$ sont censées être disposées de toutes les manières possibles et affectées de divers indices jusqu'à $n-1$. Il faut prouver que ce terme, considéré dans la généralité de son expression, renferme toutes les permutations dont sont susceptibles les lettres $a, b, c, \ldots f, h$, qu'il faut avoir soin d'affecter de divers indices jusqu'à l'indice n.

A cet effet, il faut observer que les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varphi$ étant différentes, il résulte de l'inspection des lignes verticales du tableau (4), que les lettres françaises correspondantes seront affectées d'indices différents dont le plus élevé sera marqué par $n - 1$; en outre les indices de α, ϵ, $\gamma, \ldots \varphi$ étant différents, il résulte de l'inspection des lignes horizontales que les lettres françaises correspondantes seront toutes différentes entre elles. D'où il suit que le produit $\alpha\epsilon\gamma\ldots\tau_{n'}\ldots\varphi$ équivaut au produit des quantités b, c, $d, \ldots f$, h, qu'il faut concevoir disposées de toutes les manières possibles et affectées ensuite de divers indices dont le dernier est $n - 1$. Maintenant si l'on considère la ligne horizontale du tableau (4), où l'indice des diverses lettres grecques est égal à n', on trouvera pour la lettre française correspondante la lettre t, qui devra être affectée d'un indice dépendant du rang de la lettre grecque τ, et ce rang est marqué par $p + 1$, puisque τ est le coefficient de m_p. Concluons-en que $\tau_{n'}$ revient au même que t_p; on voit aussi que $\chi_{n'}$ correspond à $-t_n$, de sorte que lorsqu'on remplace $\tau_{n'}$ par $\chi_{n'}$ dans la permutation $\pm a_p\alpha\epsilon\gamma\ldots\tau_{n'}\ldots\varphi$, c'est comme si l'on remplaçait t_p par $-t_n$. L'indice p disparaît donc dans le produit des lettres $b, c, d\ldots t\ldots f, h$; mais le facteur a_p le fait reparaître. Concluons enfin que l'expression générale $\pm a_p\alpha\epsilon\gamma\ldots \chi_{n'}\ldots\varphi$ comprend toutes les permutations des lettres $a, b, c\ldots f, h$, dans lesquelles la lettre a serait affectée de l'indice p. On verrait de la même manière que les numérateurs des autres parties qui composent le dénominateur de x donnent les permutations des mêmes lettres a, b, $c\ldots f$, h, dans lesquelles la lettre a serait affectée successivement de divers indices, y compris l'indice n, car on le démontrerait encore plus facilement pour le terme a_n du dénominateur de x. De là résulte évidemment la première partie de la loi que nous voulons établir.

Maintenant démontrons que les termes du dénominateur de x qui présentent un nombre pair d'inversions sont de même signe, et que ceux qui en présentent un nombre impair ont un signe différent du premier. Si cela est démontré, on pourra dire (en ayant soin toutefois de changer les signes des deux termes de la valeur de x, si cela est nécessaire) que les termes dont le nombre des inversions est pair sont affectés du signe $+$, et que ceux dont le nombre des inversions est impair sont affectés du signe $-$.

Reprenons le terme du dénominateur de m_p représenté par $\pm\alpha\beta\gamma\ldots\tau_{n'}\ldots\varphi$ ou bien $\pm\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$ qui est positif ou négatif selon que le nombre des inversions qu'il présente est pair ou impair. Remarquons que n', qui est l'indice de la lettre grecque τ déterminant le rang de la lettre t, indique le nombre des lettres françaises $b, c, d\ldots$ qui précèdent t dans l'ordre alphabétique. Parmi ces lettres, les unes précèderont t dans la permutation $\pm\, \alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$, les autres la suivront. Soit h le nombre des premières, celui des secondes sera $n'-h$. Si nous remarquons aussi que le nombre total des lettres qui précèdent t dans la permutation est égal à p (puisque t y est affecté de l'indice p), nous en conclurons que parmi les lettres qui suivent t dans l'ordre alphabétique, il y en a un nombre marqué par $p-h$ qui la précèdent dans la permutation; quant à celles qui suivent t dans la permutation, leur nombre est facile à obtenir, car du nombre total des lettres $b, c, d\ldots f, h$, qui est marqué par n, il faut évidemment retrancher $p+1$ et $n'-h$, ce qui donne $n-p-1-n'+h$. Cela posé, voyons à quoi est égal le nombre total des inversions du terme $\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$: nous en distinguerons deux sortes, selon qu'elles sont dues à la lettre t ou qu'elles en sont indépendantes. Or le nombre de celles qui proviennent de la lettre t est visiblement égal à $n'-h+p-h=n'+p-2h$; nous désignerons par ν le nombre des inversions provenant des autres lettres, de sorte que le nombre total des inversions du terme que nous considérons sera $n'+p-2h+\nu$. Mais puisqu'on remplace t_p par a_p dans la permutation, et que l'on met t_n à la fin de la permutation, la lettre a occupe le $(p+1)^{ième}$ rang et donne lieu à un nombre d'inversions marqué par p, et la lettre t, placée au dernier rang, donne lieu à un nombre d'inversions marqué par $n-(n'+1)$; car n est le nombre total des lettres $b, c, d\ldots t\ldots f, h$, et n' le nombre de celles qui précèdent t dans l'ordre alphabétique. Donc le nombre total des inversions du terme $a_p\alpha\beta\gamma\ldots\chi_n\ldots\varphi$, ou bien $a_p\alpha\beta\gamma\ldots t_n\ldots\varphi$ sera $\nu+p+n-n'-1$. Actuellement admettons que le nombre des inversions que présente le terme positif $\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$ soit pair, et désignons-le par 2μ; nous aurons, d'après ce qui précède, $\nu+n'+p-2h=2\mu$, d'où

$$\nu=2\mu-n'-p+2h,$$

valeur qui substituée dans l'expression $\nu+p+n-n'-1$, la convertit en la suivante

$$2\mu - 2n' + 2h + n - 1.$$

Or la composition de cette expression montre que la parité ou l'imparité du nombre qu'elle représente ne dépendent que de n. Donc tous les termes tels que $\alpha\beta\gamma\ldots t_p\ldots\varphi$ qui étaient positifs et renfermaient un nombre pair d'inversions, donnent lieu, après la substitution de $-t_n$ à la place de t_p, à des termes tels que $-a_p\alpha\beta\gamma\ldots t_n\ldots\varphi$ qui sont tous négatifs et qui ont tous des nombres d'inversions de même parité. En remplaçant 2μ par $2\mu+1$, on verra de la même manière que tous les termes positifs du dénominateur de x ont même parité entre eux, mais une parité contraire à la première. C'est là ce qu'il fallait démontrer.