JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 501-508.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__501_0>

Sur le Principe fondamental de la théorie des Équations algébriques;

PAR J. LIOUVILLE.

1. En insérant dans la nouvelle édition de ses *Leçons de Géométrie analytique* la démonstration d'un beau théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations (*), M. Lefébure de Fourcy a rappelé au souvenir des géomètres un petit ouvrage de M. Mourey, imprimé en 1828, sous ce titre : *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.* « Le but de l'auteur est, » dit-il, d'affranchir entièrement l'analyse de ces sortes de quantités : » il y réussit en introduisant dans le calcul deux espèces de grandeurs, » qui ne sont autre chose que les distances et les angles qu'on dé» signe sous le nom de *coordonnées polaires*. Dans le système d'Al» gèbre développé par M. Mourey, ces grandeurs offrent la repré» sentation fidèle des expressions imaginaires qu'on emploie dans » l'Algèbre ordinaire; et en suivant l'ordre de ses idées, l'auteur » était parvenu à démontrer qu'une équation du degré m a m » racines. »

Nous ne pensons pas que les notations et les dénominations nouvelles introduites par M. Mourey méritent d'être préférées à celles que les géomètres ont adoptées depuis long-temps. Mais la démonstration qu'il a donnée du théorème cité par M. Lefébure de Fourcy est très remarquable, bien qu'elle ne soit peut-être pas tout-à-fait complète. Le lecteur nous saura gré de l'exposer ici en peu de mots, en adoptant pour plus de simplicité le langage ordinaire des analystes.

2. La méthode de M. Mourey repose précisément sur le lemme dont

(*) *Voyez* tome Ier de ce Journal, page 278.

M. Sturm a fait usage dans celle des démonstrations du théorème de M. Cauchy où il admet *à priori* que tout polynome de degré m se décompose en m facteurs du premier degré (*). Voici en quoi consiste ce lemme qu'il suffira d'énoncer ici : Étant tracé dans un plan yAx un contour fermé quelconque, imaginons qu'un point M se meuve, toujours dans le même sens, sur ce contour, puis désignons par ω, $\omega_1, \ldots \omega_{m-1}$, les angles que font avec un axe fixe les rayons vecteurs menés à chaque instant au point M de m points fixes A, B,...D situés dans le plan yAx soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du contour fermé, mais non sur le contour même. Quand le point M aura parcouru le contour entier et sera revenu à sa position primitive, la somme des angles $\omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1}$ aura augmenté ou diminué, suivant que le mouvement aura eu lieu dans un sens ou dans le sens opposé, d'autant de fois quatre angles droits qu'il y a de points A, B, etc., dans l'intérieur du contour fermé.

Si donc on sait d'avance qu'il y a au moins un de ces points A, B, etc., dans l'intérieur du contour fermé, on voit qu'en déplaçant le point M d'une certaine quantité, et dans un sens convenable, sur le contour qu'il pourra du reste, s'il est nécessaire, parcourir plusieurs fois, on augmentera ou l'on diminuera la somme $\omega + \omega_1 + \ldots + \omega_{m-1}$ de telle quantité qu'on voudra. On s'en convaincra en observant que les angles ω, ω_1, etc., varient d'une manière continue pendant le mouvement du point M. Tel est le principe qui sert de base aux recherches de M. Mourey.

3. Maintenant soit

$$(1) \qquad z^m + Pz^{m-1} + \ldots + Sz + T = 0$$

une équation algébrique de degré m, dont les coefficients sont réels ou de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Il s'agit de prouver que cette équation a au moins une racine de même forme que les coefficients. Or comme le théorème est évident lorsqu'on a $m = 1$, il suffira, pour l'établir en général, de prouver que s'il est exact pour toute équa-

---

(*) Tome Ier de ce Journal, page 290.

tion de degré inférieur à m, il sera vrai aussi pour toute équation de degré m.

Admettre que toute équation de degré $< m$ a au moins une racine, c'est admettre, comme on sait, que tout polynome de degré inférieur à m est décomposable en facteurs du premier degré par rapport à z. Ainsi en particulier le polynome

$$z^{m-1} + Pz^{m-2} + \ldots\ldots + S$$

doit pouvoir se décomposer dans un produit tel que

$$(z - a_1 - b_1\sqrt{-1}) \ldots\ldots (z - a_{m-1} - b_{m-1}\sqrt{-1});$$

la question est de savoir si ce produit, multiplié par z, peut être rendu égal à $-$ T.

Posons $z = x + y\sqrt{-1}$, puis représentons-nous x et y comme les coordonnées d'un point M appartenant à un plan dans lequel sont tracés deux axes rectangulaires Ax, Ay; enfin désignons par B, C...D les $(m-1)$ points déterminés par les coordonnées $(a_1, b_1), \ldots (a_{m-1}, b_{m-1})$. En nommant ρ le rayon vecteur AM, et ω l'angle que ce rayon vecteur fait avec l'axe des x, on aura

$$z = x + y\sqrt{-1} = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Représentant de même par ρ_1 la droite BM et par ω_1 l'angle de cette droite avec l'axe des x, il vient

$$z - a_1 - b_1\sqrt{-1} = \rho_1(\cos\omega_1 + \sqrt{-1}\sin\omega_1):$$

on trouvera semblablement pour les autres points C, ...D

$$z - a_2 - b_2\sqrt{-1} = \rho_2(\cos\omega_2 + \sqrt{-1}\sin\omega_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z - a_{m-1} - b_{m-1}\sqrt{-1} = \rho_{m-1}(\cos\omega_{m-1} + \sqrt{-1}\sin\omega_{m-1}),$$

de telle sorte que le produit

$$z(z - a_1 - b_1\sqrt{-1}) \ldots\ldots (z - a_{m-1} - b_{m-1}\sqrt{-1})$$

devient

$$[\rho\rho_1\ldots\rho_{m-1}\cos(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{m-1})$$
$$+\sqrt{-1}\sin(\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{m-1})].$$

Pour que ce produit soit égal à $-\mathrm{T}$, il faut qu'après avoir mis $-\mathrm{T}$ sous la forme $\mathrm{R}(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)$, on ait

$$(2)\qquad \rho\rho_1\ldots\rho_{m-1}=\mathrm{R},$$
$$(3)\qquad \omega+\omega_1+\ldots+\omega_{m-1}=\alpha\pm 2i\pi,$$

i étant zéro ou un nombre entier quelconque.

4. Occupons-nous spécialement de l'équation (2), et après avoir donné à ω une valeur particulière quelconque, observons que le produit $\rho\rho_1\ldots\rho_{m-1}$ est une fonction continue de ρ, qui se réduit à o pour $\rho=0$, et qui croît jusqu'à ∞ quand ρ augmente indéfiniment. Donc pour chaque valeur déterminée de ω, il existe au moins une valeur réelle et positive de ρ qui vérifie l'équation (2). « En d'autres termes, si » du point A et dans le plan $y\mathrm{A}x$ on tire des rayons en tous sens, sur » chaque rayon il se trouvera un point M satisfaisant à la condi- » tion (2) : or la réunion de tous ces points sera visiblement une courbe » enveloppant le point A de toutes parts (*); donc il existe une courbe » δ, enveloppant le point A, dont chaque point satisfait à la première » condition (2). » Maintenant y a-t-il sur cette courbe δ un point M pour lequel l'équation (3) soit aussi satisfaite? La réponse à cette question ne sera pas douteuse, si l'on se rappelle qu'en vertu du lemme du n° 2, on peut, en faisant mouvoir le point M sur notre contour fermé δ, augmenter ou diminuer la somme $\omega+\omega_1+\ldots+\omega_{m-1}$ de telle quantité qu'on voudra : cela résulte de ce qu'au moins un des points A, B,...D, savoir le point A, est situé dans l'intérieur de ce contour fermé. Ajoutons qu'aucun d'eux ne peut être situé

(*) C'est ainsi que s'exprime M. Mourey ; mais pour que l'ensemble des points M forme une courbe véritable, il faut que le rayon vecteur AM varie d'une manière continue en même temps que ω, ce que l'auteur n'a pas prouvé : sur ce point sa démonstration nous paraît incomplète.

sur le contour même. En effet, si cela avait lieu pour B par exemple, il faudrait qu'en supposant le point M placé en B, l'équation (2) fût satisfaite; or cela est absurde, puisque le rayon vecteur BM ou ρ_1 étant nul alors, le produit $\rho\rho_1\ldots\rho_{m-1}$ s'annule aussi et ne peut plus être égal à R.

Ainsi se trouve démontrée la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques. Cette proposition est du reste susceptible d'un grand nombre d'autres démonstrations très différentes entre elles. En voici une assez singulière, et, je crois, peu connue.

5. En désignant par ρ et ω les coordonnées polaires d'un point pris dans un plan fixe horizontal, et par z une fonction réelle et déterminée de ρ et ω qui ne devient pas infinie entre les limites o et R de ρ, o et 2π de ω, on voit que les deux intégrales doubles

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega,\quad \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho,$$

sont nécessairement égales entre elles, puisqu'elles représentent toutes deux un même volume; savoir, le volume compris entre le plan fixe, la surface cylindrique droite ayant pour base un cercle de rayon R tracé autour de l'origine des coordonnées prise pour centre, et une autre surface dont l'ordonnée verticale est pour chaque système de valeurs des deux quantités ρ et ω, représentée par z. Or, on peut de là conclure, avec M. Gauss, que le premier membre de toute équation algébrique à coefficients réels

$$z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \ldots + Lz + M = 0$$

est toujours divisible par un certain facteur réel du premier ou du second degré, c'est-à-dire par un facteur compris dans l'une des deux formes $z-\rho$, $z^2 - 2\rho z \cos\omega + \rho^2$. En d'autres termes, on peut prouver qu'il existe toujours des valeurs réelles des deux quantités ρ et ω satisfaisant à la fois aux deux équations

$$\rho^m \cos m\omega + A\rho^{m-1} \cos(m-1)\omega + \ldots + L\rho\cos\omega + M = 0,$$
$$\rho^m \sin m\omega + A\rho^{m-1} \sin(m-1)\omega + \ldots + L\rho\sin\omega = 0 \text{ (*)}.$$

(*) M. Gauss prouve très simplement, et sans recourir aux imaginaires, que si

Désignons en effet par t et u les premiers membres de ces équations, puis posons

$$t' = \frac{du}{d\omega} = \rho\frac{dt}{d\rho}, \quad u' = -\frac{dt}{d\omega} = \rho\frac{du}{d\rho},$$
$$t'' = \frac{du'}{d\omega} = \rho\frac{dt'}{d\rho}, \quad u'' = -\frac{dt'}{d\omega} = \rho\frac{du'}{d\rho}.$$

Soit R une quantité positive quelconque, mais plus grande que la plus grande des quantités

$$mA'\sqrt{2},\ \sqrt{mB'\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{mC'\sqrt{2}},\ldots\ldots\ \sqrt[m]{mM'\sqrt{2}},$$

où A', B', C',...M' désignent les valeurs absolues des coefficients A, B, C,...M. Cela étant, je dis que si l'on pose $\rho = R$, la somme $tt' + uu'$ aura une valeur positive. Pour le montrer, observons d'abord que les quatre quantités suivantes

$$R^m \cos\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + M\cos\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right),$$
$$R^m \sin\frac{\pi}{4} + AR^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + M\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\omega\right),$$
$$mR^m \cos\frac{\pi}{4} + (m-1)AR^{m-1}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + L\cos\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right),$$
$$mR^m \sin\frac{\pi}{4} + (m-1)AR^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right) + \ldots + L\sin\left(\frac{\pi}{4}+(m-1)\omega\right),$$

que je nommerai respectivement T, U, T', U', sont toutes > 0 : on le prouve, par exemple, pour la première, en décomposant T sous cette forme

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}\left[R + mA\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}\left[R^2 + mB\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\omega\right)\right]$$
$$+\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}\left[R^3 + mC\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\omega\right)\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

ces deux équations sont satisfaites, le polynome $z^m + Az^{m-1} +$ etc. sera divisible, soit par $z - \rho$, si $\omega = 0$, soit par $z^2 - 2\rho z\cos\omega + \rho^2$, si ω diffère de 0.

et en se rappelant ce que l'on a dit ci-dessus de la grandeur de R. Une démonstration semblable s'applique aux trois autres sommes U, T', U'.

Or, pour $\rho = \text{R}$, on a

$$t = \text{T} \cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) + \text{U} \sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$
$$u = \text{T} \sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) - \text{U} \cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$
$$t' = \text{T}' \cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) + \text{U}' \sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$
$$u' = \text{T}' \sin\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right) - \text{U}' \cos\left(\frac{\pi}{4} + m\omega\right),$$

et de là résulte $tt' + uu' = \text{TT}' + \text{UU}'$: donc $tt' + uu'$ est > 0. On observera en passant que nos équations donnent en outre

$$t^2 + u^2 = \text{T}^2 + \text{U}^2.$$

6. Maintenant on peut prouver le théorème dont nous nous occupons; savoir, qu'*entre les limites* $\rho = 0$, $\rho = \text{R}$, $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$, *il existe certaines valeurs de* ω *et de* ρ *pour lesquelles on a à la fois* $t = 0$, $u = 0$. Car, si l'on n'admet pas ce théorème, il faudra en conclure que la fraction

$$z = \frac{(t^2 + u^2)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{\rho(t^2 + u^2)^2}$$

ne deviendra pas infinie entre les limites citées, et que, par suite, on aura

$$\int_0^{\text{R}} d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\text{R}} z d\rho.$$

Or il vient

$$\int z d\omega = \frac{tu' - ut'}{\rho(t^2 + u^2)},$$

comme on le vérifie aisément par la différentiation : de plus, t, u, t', u', reprennent les mêmes valeurs aux deux limites 0 et 2π : par conséquent

$$\int_0^{2\pi} z d\omega = 0,$$

en sorte que la première de nos deux intégrales doubles se réduit à zéro. Mais la seconde est au contraire essentiellement $>$ o. En effet, si l'on intègre d'abord par rapport à ρ, on a

$$\int z d\rho = \frac{tt' + uu'}{t^2 + u^2}:$$

d'où

$$\int_0^R z d\rho = \frac{TT' + UU'}{T^2 + U^2},$$

et partant

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{(TT' + UU') d\omega}{T^2 + U^2};$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho = \text{une quantité positive},$$

puisque l'élément

$$\frac{(TT' + UU') d\omega}{T^2 + U^2}$$

est essentiellement positif. Donc l'équation

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} z d\omega = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R z d\rho$$

est impossible; donc aussi la fraction z devient infinie une ou plusieurs fois, et par suite t et u s'annulent ensemble pour des valeurs réelles de ρ et ω; C. Q. F. D. (*).

(*) Si nous posons $\log \rho = \theta$, ou $\rho = e^\theta$, nous verrons de suite que $\varphi = t$ et $\varphi = u$ sont deux intégrales de l'équation $\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = 0$. D'après un théorème démontré par M. Lamé (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIII^e cahier, p. 245), cette équation sera donc aussi vérifiée par $\varphi = \log \sqrt{t^2 + u^2}$. Il suit de là que les deux quantités

$$\frac{d^2 \log \sqrt{t^2 + u^2}}{d\theta^2}, \quad - \frac{d^2 \log \sqrt{t^2 + u^2}}{d\omega^2},$$

sont égales entre elles; leur valeur commune est précisément celle du produit ρz.