JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur quelques points de la théorie de l'électricité

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 495-500.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__495_0>

Note sur quelques points de la théorie de l'Électricité ;

PAR M. J. BERTRAND,

Élève de l'École Polytechnique.

I.

L'expérience montre que l'électricité se porte à la surface des corps : ce fait a été pris comme point de départ par les géomètres qui se sont occupés de la théorie mathématique de l'électricité. Mais on peut prouver très simplement de la manière suivante qu'il est une conséquence de la loi de Coulomb.

M. Poisson a montré que lorsqu'un point M dont les coordonnées sont x, y, z, est attiré, suivant cette loi, par une masse dont il fait partie, on a

$$(a) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

V représentant $\iiint \frac{dm}{r}$, c'est-à-dire la somme des quotients obtenus en divisant la masse de chaque élément par sa distance au point M, et ρ étant la densité relative à ce dernier point. Maintenant considérons un système dans lequel l'électricité soit en équilibre; et dans l'intérieur d'un des corps qui en font partie, prenons un point M à volonté; désignons par ρ la densité de l'électricité libre en ce point : il s'agit de prouver que l'on a $\rho = 0$. Or, pour que le fluide neutre placé en M ne soit pas décomposé, il faut que la résultante des actions électriques exercées sur ce point soit nulle : en d'autres termes si dm désigne un élément positif ou négatif de masse électrique, il faut que la fonction désignée tout-à-l'heure par V reste constante lorsqu'on fait varier les coordonnées x, y, z, du point M. Par suite l'équation (a)

nous donne $\rho = 0$, C. Q. F. D. Il ne peut donc y avoir d'électricité qu'aux points sur lesquels l'atmosphère peut agir (*). Ceci suppose que la loi de Coulomb soit applicable aux petites distances : on ne pourrait pas prononcer *à priori* sur cette hypothèse, mais il me semble qu'elle est rendue probable par la conséquence qu'on vient d'en tirer.

II.

On sait que quels que soient les rayons de deux sphères en contact, la densité électrique est toujours nulle au point commun. Je vais démontrer que ce résultat s'applique à un nombre quelconque de corps électrisés qui se touchent.

Par le point de contact de deux de ces corps, menons-leur une normale commune, qui percera les surfaces intérieures des deux couches en des points A et B. Si par ces points A et B on mène des plans tangents aux surfaces sur lesquelles ils se trouvent, on décomposera chaque couche en deux parties, dont l'une sera infiniment petite par rapport à l'autre.

Soient M, M', N, N', ces parties.

On sait (**) que les actions exercées sur A et sur B par chacune des portions finies M, N auront les mêmes composantes normales, en négligeant les infiniment petits du second ordre. Soit P la composante de M, Q celle de N : les composantes dues aux parties M', N', seront, comme Laplace l'a prouvé, $\pm 2\pi\varepsilon$, $\pm 2\pi\varepsilon'$, le signe $+$ se rapportant au point B, le signe $-$ au point A, et ε, ε' représentant les

(*) Des expériences assez nombreuses, et dont quelques-unes remontent aux recherches physiques et mécaniques de Hauksbée, semblent indiquer, il est vrai, que l'électricité peut se conserver dans un vide très parfait. Que cela tienne ou non à la petite quantité d'air qu'il est impossible de chasser, ce fait n'est nullement en contradiction avec le raisonnement précédent, car il est clair que l'on doit toujours admettre aux limites des corps une certaine modification qui influe sur l'équilibre des molécules électriques qui en sont voisines ; et d'ailleurs, notre démonstration prouve la nécessité d'une pareille influence, quelle qu'en soit du reste la cause.

(**) Premier Mémoire de M. Poisson sur l'électricité (*Mémoires de l'Institut*, année 1811, première partie, page 31).

épaisseurs des deux couches. Soit R la composante qui provient de l'action de tous les autres corps : on aura

$$P - Q - R - 2\pi\varepsilon - 2\pi\varepsilon' = 0 \text{ pour l'équilibre du point A,}$$
$$P - Q - R + 2\pi\varepsilon + 2\pi\varepsilon' = 0 \text{ pour l'équilibre du point B;}$$

or ces deux équations sont incompatibles, à moins que $\varepsilon + \varepsilon' = 0$, auquel cas l'épaisseur totale des deux couches électriques en M se réduit à zéro.

III.

Le phénomène remarquable connu sous le nom de *pouvoir des pointes* résulte de ce que les corps anguleux ne peuvent pas conserver l'électricité qu'ils renferment. On peut démontrer de la manière suivante que la densité électrique devrait en effet devenir infinie aux points anguleux d'un système, quelle que soit du reste sa forme.

Supposons pour fixer les idées, que le corps considéré présente une partie conique à base circulaire MNA. Si l'équilibre était possible l'électricité formerait, dans le voisinage du sommet A, une couche conique infiniment mince : soit O le sommet de la surface intérieure de cette couche, en sorte que OA représente l'épaisseur électrique au point A.

Il faudra, pour l'équilibre, que la résultante des actions sur le point O soit nulle, et par conséquent, que la partie infiniment petite OA, détachée par un plan OP perpendiculaire à l'axe, exerce une action égale et contraire à celle de tout le reste du corps. Or on voit très facilement que la composante suivant l'axe du cône de l'action de OA est moindre que 2πOA, qui serait sa valeur dans le cas où la couche serait sphérique et de même épaisseur OA, et je vais prouver que l'action des autres parties du système donne une composante infinie par rapport à la densité électrique de ses différents points.

Pour cela, décomposons le cône en tranches comprises entre deux plans très voisins perpendiculaires à son axe, et qui coupent les génératrices à une distance l du sommet; l'action d'une des tranches aura pour composante suivant l'axe

$$\frac{2\pi midl \cos\alpha}{l}$$

m étant une constante égale à $\sin\frac{\theta}{2}$ si θ désigne l'angle du cône, ω étant l'angle que fait avec l'axe une droite menée du point O à un quelconque des points de la tranche, et i représentant l'épaisseur moyenne dans la section. En négligeant les actions des parties situées à une distance du point O représentée par un nombre fini l_2 aussi petit qu'on voudra, lesquelles ne peuvent produire qu'une résultante finie, il faut intégrer cette expression, depuis $l=0$ jusqu'à $l=l_2$. L'intégrale ainsi formée aura une valeur plus grande que celle qu'on obtiendrait en remplaçant la limite o par l_1, l_1 étant la distance (infiniment petite) à laquelle on peut considérer les actions comme dirigées suivant les génératrices du cône, et l'angle ω comme égal à $\frac{\theta}{2}$. Elle sera donc plus grande que

$$2\pi m \cos\frac{\theta}{2}\int_{l_1}^{l_2}\frac{idl}{l} = 2\pi m n \cos\frac{\theta}{2}(\log l_2 - \log l_1),$$

n étant une valeur moyenne de i; or l_1 est infiniment petit, par conséquent $\log l_1$ est négatif et infiniment grand : l'action est donc infinie, et OA devrait l'être aussi pour l'équilibre.

Le raisonnement que nous venons de faire pour le cône à base circulaire devrait être modifié dans le cas général : on prouverait alors que l'action est plus grande que celle qui se rapporterait à un cône dont les génératrices auraient sur l'axe choisi arbitrairement une inclinaison égale à l'inclinaison maxima des tangentes et dont la densité électrique serait égale pour chaque tranche à la densité minima des points de la tranche correspondante. On ferait un raisonnement semblable pour le cas d'une arète vive quelconque.

IV.

Laplace a prouvé que l'action d'un corps électrisé sur un point de sa surface est proportionnelle à la densité électrique en ce point. Dans sa démonstration, il suppose que la couche soit homogène de la surface intérieure à la surface extérieure. Cette hypothèse n'a évidemment aucune influence quand on calcule l'action sur un point éloigné, mais on pourrait craindre qu'elle n'altérât les résultats, quand il s'agit des points mêmes de la surface. Nous allons montrer qu'il n'en est rien, et que le théorème de Laplace subsiste, quelle que soit la loi de décroissement de la densité.

1°. Considérons une sphère à la surface de laquelle l'électricité forme une couche infiniment mince, partout également épaisse. Supposons que la densité croisse, ainsi que la symétrie l'exige, par couches concentriques. L'action d'un élément compris entre deux sphères infiniment voisines sur un point de la surface sera

$$\frac{4\pi(r+\rho)^2}{(r+c)^2}\,\mathrm{D}d\rho,$$

D étant la densité qui correspond au rayon $r+\rho$. L'action totale sera donc

$$4\pi\int_0^c \frac{(r+\rho)^2}{(r+c)^2}\,\mathrm{D}d\rho\,;$$

mais on peut supposer $\frac{r+\rho}{r+c}=1$, en négligeant les infiniment petits du second ordre. On aura donc

$$4\pi\int_0^c \mathrm{D}d\rho,$$

ce qui n'est autre chose que l'expression de Laplace, car $\int_0^c \mathrm{D}d\rho$ est la densité moyenne.

2°. Considérons sur un corps de forme quelconque un point où la surface puisse être considérée comme sphérique dans une étendue infiniment petite. L'action se composera, ainsi que Laplace l'a prouvé, de la somme de celles qu'exerce sur son sommet et sur le centre de sa base la calotte infiniment petite, détachée par le plan tangent à la couche inférieure. Cette somme est indépendante de la forme du reste du corps ; elle est donc d'après ce que nous venons de dire $4\pi\varepsilon$.

3°. Supposons un point où les rayons de courbure soient inégaux : on décomposera la calotte infiniment petite, en fuseaux qui pourront être considérés comme tracés sur des sphères de différents rayons, et l'on remarquera que la somme des actions qui correspond à un de ces fuseaux est $\varepsilon d\omega$, $d\omega$ représentant l'angle du fuseau. En intégrant on retrouvera $2\pi\varepsilon$. L'action est donc indépendante du mode de décroissement de la densité, lorsqu'il s'agit des points de la surface. Mais il est facile de voir que cette conséquence ne s'applique pas aux points intermédiaires de la couche.

V.

M. Liouville a démontré cette année, dans son cours au Collége de France, que la loi de Coulomb est la seule qui permette au fluide électrique de former une couche infiniment mince à la surface d'une sphère.

On peut établir cette proposition importante de la manière suivante:

Dans toute autre loi que celle de la raison inverse du carré de la distance, une couche homogène exerce une certaine action sur les points intérieurs : ce théorème qui a été démontré par Laplace dans la *Mécanique céleste*, peut s'établir par les considérations suivantes qui sont dues, je crois, à M. Rodrigues.

Si une couche n'exerce pas d'action sur les points intérieurs, une sphère agira sur les points de sa surface comme toute autre sphère concentrique de rayon plus grand. Soit A cette action : le théorème d'Ivory qui, comme on sait, s'applique à toute loi d'attraction, prouve que l'action A de la grande sphère sur les points situés à la surface de la petite, est à l'action B de la petite sur les points de la grande, comme les carrés des rayons de ces sphères.

Or A est, nous l'avons dit, indépendant du rayon de la grande sphère; donc B est en raison inverse du carré de ce rayon, ce qui prouve la loi énoncée, en supposant que la petite sphère se réduise à son centre.

Ainsi une couche homogène est impossible, lorsque la loi d'attraction est différente de celle de Coulomb.

Cela posé, je dis que s'il y avait une couche infiniment mince qui pût assurer l'équilibre, on pourrait en former une autre, homogène, et qui serait également possible.

Supposons qu'un certain état où l'épaisseur serait représentée par une fonction $\varphi(\theta, \psi)$ des coordonnées angulaires, par rapport à des axes passant par le centre, puisse exister : il est évident qu'en prenant la même fonction par rapport à d'autres axes passant également par le centre, on formera d'autres états possibles ; car cela revient à donner un mouvement commun à tous les points du système. Le nombre de ces états est infini et en prenant pour chaque point la moyenne des épaisseurs qu'il a dans chacun d'eux, on en formera un qui sera homogène, et comme ce dernier est impossible, le premier ne pouvait pas non plus exister.