JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL TRANSON

Généralisation de la théorie des foyers dans les sections coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 457-482.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__457_0>

Généralisation de la Théorie des foyers dans les sections coniques;

Par M. ABEL TRANSON.

M. Quetelet a fait voir qu'un cône droit étant coupé par un plan, si on imagine deux sphères qui soient à la fois inscrites au cône et tangentes au plan, leurs points de contact avec celui-ci seront les foyers de la section; et de plus, si on conçoit que les plans des deux cercles de contact de ces sphères avec le cône soient prolongés jusqu'à la rencontre du plan sécant, ils y traceront les deux directrices.

M. Dandelin a étendu ces théorèmes à l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

Mais indépendamment des deux droites directrices, il existe pour toute section conique deux cercles qu'on peut appeler à bon droit *directeurs.* Je veux parler de ces deux cercles qui ont leurs centres respectivement aux deux foyers et qui ont tous deux pour rayon une ligne égale à l'axe principal. On sait assez combien la considération de ces cercles apporte de facilité dans la construction de la plupart des problèmes qui se rapportent aux sections coniques, et leur signification dans le solide se peut donner aussi facilement que celle des foyers et des directrices. En effet, si on se représente toutes les sphères qui, étant tangentes au plan sécant, touchent *extérieurement* le solide aux mêmes points que l'une des deux sphères inscrites, le lieu des contacts de ces sphères extérieures avec le plan de section sera l'un des deux cercles directeurs, et notamment celui qui a pour centre le foyer relatif à l'autre sphère inscrite.

Je me suis proposé dans les recherches qui suivent d'introduire, dans la construction donnée par M. Quetelet pour les foyers, une modification qui m'a paru ouvrir le champ à quelques remarques curieuses et procurer à la notion même des foyers une extension remarquable.

I.

Définition des systèmes focaux simples ou composés et à bases circulaires.

Imaginons que les deux sphères inscrites dans le solide ne soient plus tangentes au plan sécant, mais qu'elles le pénètrent d'une quantité quelconque. Il va sans dire que leurs courbes de contact se déplaceront sur le solide. De plus elles traceront sur le plan sécant deux cercles dont les centres demeureront toujours sur l'axe principal de la conique, se rapprochant d'autant plus du centre de celle-ci que la pénétration sera plus considérable si la section est elliptique; s'en éloignant d'autant plus si c'est une hyperbole.

Cela posé, si d'un point quelconque de la section on mène une tangente à chacun des deux cercles dont il s'agit, on pourra appliquer le raisonnement employé par MM. Quetelet et Dandelin dans le cas où les sphères inscrites ne font que toucher le plan sécant, et on verra encore que la somme ou bien la différence de ces deux lignes respectivement tangentes aux deux cercles de pénétration, est une quantité constante.

Pour fixer les idées supposons que les deux sphères aient pénétré le plan sécant de telle façon que les deux cercles de pénétration soient égaux. On en conclura facilement que leurs centres sont à égale distance de part et d'autre du centre de la section. Et alors si d'un point quelconque de cette section on mène à chacun de ces cercles égaux deux tangentes, et si en chacun d'eux on joint le centre aux points de contact, on formera deux quadrilatères jouissant de cette propriété que la somme ou bien la différence de leurs aires ne variera pas, quel que soit le point de la section que l'on considère.

Or, en passant d'un point à un autre de la section, les deux *quadrilatères vecteurs* ci-dessus définis pivotent sur les centres des cercles de pénétration; on peut donc considérer ces centres comme de véritables *foyers*. Et puisque plusieurs systèmes de cercles conjugués peuvent être construits sur l'axe principal d'une section conique, il y aura lieu d'y distinguer plusieurs *systèmes focaux*.

Nous appellerons *bases* du système focal les deux cercles sur lesquels reposent les quadrilatères vecteurs, et *module* la quantité constante formée de la somme ou de la différence des aires vectrices. Quand les deux *bases* sont égales, le module est *simple* parce qu'il représente la simple somme ou différence des deux quadrilatères ci-dessus définis. Mais si les deux bases sont inégales, il faut, pour avoir une somme ou une différence constante, multiplier chacune des aires vectrices par un coefficient inversement proportionnel au rayon de la base qui lui correspond. Nous dirons alors que le module est *composé*.

Déjà, en acceptant ces définitions, on voit qu'une même conique est susceptible d'une infinité de systèmes focaux qui diffèrent entre eux par la situation des foyers, par la grandeur des bases, et aussi par la grandeur et la forme du module. A la vérité les foyers ne se présentent jusqu'ici que sur l'axe principal, intérieurement aux deux foyers ordinaires dans l'ellipse, extérieurement dans l'hyperbole. Mais si on consent à cette transformation de la notion des foyers qui consiste à substituer une relation de superficies à la relation linéaire qui les a caractérisés jusqu'ici, on va voir cette relation subsister pour tous les points intérieurs et extérieurs d'un diamètre quelconque.

II.

Systèmes focaux à bases elliptiques; systèmes uniformes et systèmes bifides.

Faisons abstraction du solide et considérons sur le plan une section conique avec l'un quelconque de ses systèmes focaux à bases circulaires et à module simple ou composé, tels en un mot qu'on vient de les définir. De là nous allons faire naître sans difficulté d'autres systèmes focaux dont les bases seront elliptiques et dont les foyers seront sur un diamètre quelconque.

Imaginons premièrement que toutes les ordonnées ou bien toutes les abscisses croissent ou décroissent dans un rapport constant. La section conique, quoique changeant de forme, demeurera de même espèce, je veux dire elliptique ou hyperbolique. De plus elle sera encore rapportée à ses axes, mais avec cette circonstance particulière à l'ellipse que, par l'effet de la transformation dont il s'agit, les axes pourront être renversés. En même temps les deux cercles, bases du système focal, se changeront en ellipses. Et, comme par une telle transformation toutes les aires des figures transformées croissent ou diminuent dans un rapport constant qui est celui même des anciennes coordonnées aux nouvelles, il est clair que les quadrilatères vecteurs de la conique transformée, pivotant toujours sur des points fixes mais reposant sur des bases elliptiques, offriront dans la somme ou dans la différence de leurs aires un module constant, lequel sera simple ou composé en même temps que celui de la conique primitive. Il y aura donc encore un vrai *système focal*. Enfin les foyers continueront à la vérité d'être sur l'axe principal, si ce n'est dans le cas du renversement des axes de l'ellipse; mais il est facile de voir que sur ce même axe ils franchiront les limites qui bornaient leur position dans les systèmes à base circulaire (*).

En second lieu, par une nouvelle transformation qui consiste à faire tourner chaque ordonnée sur son pied d'un angle constant, on passera d'un système d'axes rectangulaires à un système de diamètres conjugués; et alors il deviendra manifeste qu'il est possible de construire sur un diamètre quelconque une infinité de systèmes focaux. Seulement les foyers demeurent dans tout ceci intérieurs à la concavité de la conique, ce qui paraît être un obstacle à ce qu'on puisse concevoir un système focal dont les foyers seraient sur le second axe de l'hyperbole ou plus généralement sur aucun des diamètres qui ne rencontrent pas cette courbe. Ce défaut apparent d'analogie disparaîtra par le moyen du calcul quand nous déterminerons d'une manière générale la forme des bases qui conviennent à une situation donnée des foyers. Mais auparavant il est nécessaire de revenir un instant à la considération du solide pour y signaler une circonstance curieuse.

(*) Par cette transformation la section proposée a pu passer de la forme elliptique à la forme circulaire; ainsi le cercle lui-même est susceptible d'une infinité de foyers et de systèmes focaux; mais les bases de ses systèmes focaux ne peuvent jamais être circulaires; de sorte que la relation caractéristique des foyers n'y prend jamais une forme linéaire comme dans l'ellipse ou dans l'hyperbole. On verra au contraire que la propriété des *contre-foyers* (ci-dessous au § VIII) est une relation linéaire dans le cercle comme dans toute autre section conique.

Dans la théorie des foyers ordinaires, la constante qui correspond au module de nos systèmes focaux, mais qui est alors essentiellement linéaire, conserve la même signification sur toute l'étendue d'une même courbe. Je veux dire que, sur une même conique, c'est toujours la somme ou bien la différence des rayons vecteurs qui est une quantité constante. Il n'en va pas toujours ainsi quand on considère soit le module linéaire formé avec deux lignes menées tangentiellement à deux bases circulaires; soit plus généralement le module superficiel formé avec deux quadrilatères à base circulaire ou elliptique. En effet, bien que le module soit toujours dans chaque système focal une quantité essentiellement constante, il peut se faire que cette quantité constante se forme, pour certaines parties de la section conique, de la somme (simple ou composée) des deux tangentes ou des deux aires vectrices; et que pour d'autres parties elle représente la différence (également simple ou composée) de ces mêmes tangentes ou aires vectrices. Pour s'en convaincre, à l'égard premièrement des systèmes circulaires, il suffit d'imaginer que les deux sphères qui déterminent les bases d'un tel système aient assez pénétré dans le plan sécant pour que leurs lignes de contact avec le cône ou avec l'hyperboloïde rencontrent la courbe de section, circonstance qui entraîne évidemment le contact de cette même courbe avec les cercles de base. Alors il arrivera que certaines parties de la section seront intérieures au système des deux plans des courbes de contact, tandis que d'autres parties lui seront extérieures. Or il est clair que, quelle que soit la nature de cette section, le module se formera quant aux parties intérieures de la somme des tangentes vectrices, et au contraire de leur différence quant aux parties extérieures. Ainsi le module n'a pas une signification uniforme dans les systèmes à bases circulaires, toutes les fois au moins que les cercles de base touchent la conique, et c'est précisément aux points de contact que le changement de signification a lieu.

Afin d'éviter les circonlocutions, j'aurai besoin qu'on me permette d'appeler *systèmes uniformes* les systèmes focaux dans lesquels le module ne change pas de signification sur tout le cours de la conique; et par opposition *systèmes bifides* ceux dans lesquels ce changement a lieu.

Il est facile de voir que quand la pénétration du plan sécant par les sphères inscrites a lieu de telle sorte que les courbes de contact de ces sphères avec le solide rencontrent la courbe de section aux extrémités de son axe principal, les deux cercles de pénétration se confondent avec les cercles osculateurs de la section à ces mêmes extrémités ; ou, en d'autres termes, les foyers coïncident alors avec les centres de courbure relatifs aux sommets du grand axe. A partir de cette situation, les sphères inscrites pénétrant davantage dans le plan sécant, les foyers continuent de se rapprocher du centre de la section si cette section est elliptique, ou continuent de s'en éloigner si elle est hyperbolique. Mais, à partir de cette même situation, le système focal est toujours bifide ; sa construction est donc extrêmement facile puisque le rayon des bases se trouve constamment égal à la normale de la conique. La considération du solide suggérerait également quelque construction simple pour les bases des systèmes circulaires dont les foyers sont situés sur cette partie du grand axe qui est comprise entre les foyers ordinaires et les centres de la courbure aux sommets principaux ; mais, comme cette détermination se pourra déduire des formules générales, je me borne à remarquer ici qu'en appliquant aux systèmes circulaires bifides les transformations indiquées ci-dessus, on est conduit à reconnaître des systèmes bifides à base elliptique sur les deux axes et généralement sur tous les diamètres d'un ellipse; comme aussi sur tous les diamètres transverses d'une hyperbole. Tous les systèmes bifides ainsi produits ont ce caractère commun qu'il y a contact entre leurs bases et la conique ; et d'ailleurs on peut prouver généralement que ce caractère de contact et la propriété d'être bifides vont toujours ensemble; car quelle que soit la forme des bases on pourra toujours par l'emploi des mêmes transformations géométriques passer du système focal proposé à un autre système ayant des bases circulaires et qui possédera évidemment l'une ou l'autre de ces deux propriétés en même temps que le système focal primitif. Or ce système à bases circulaires sera ou ne sera pas bifide suivant que ses bases toucheront ou ne toucheront pas la conique transformée.

III.

Formules pour les bases des systèmes focaux.

Concevons un cercle tracé sur un plan, et prenons le centre de ce cercle pour origine des coordonnées. Que d'un point (x, y) du même plan on mène à ce cercle deux tangentes et qu'on joigne le centre aux deux points de contact, l'aire du quadrilatère ainsi formé aura pour mesure

$$a\sqrt{x^2+y^2-a^2}=k;$$

en désignant par a la longueur du rayon. De là, et par les transformations géométriques ci-dessus employées, on conclura qu'étant donnée une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués sous l'angle ω et dont les longueurs respectives soient $2a$ et $2b$; si d'un point quelconque (x, y) de son plan on lui mène deux tangentes et si on achève le quadrilatère à l'aide des deux rayons elliptiques qui passent par les points de contact, l'aire de cette figure aura pour expression

$$ab\sin\omega\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}=k'. \qquad (1)$$

Imaginons maintenant que deux ellipses, qu'on pourra d'abord supposer inégales et même dissemblables, soient situées sur un plan d'une manière quelconque. Considérons ces deux ellipses comme les bases conjuguées d'un système focal, et cherchons le lieu géométrique des points pour lesquels la somme ou la différence (simple ou composée) des quadrilatères (k') et (k'') construits comme ci-dessus, est une quantité constante.

On prendra pour axe des abscisses la ligne qui joint les centres des deux ellipses, et on placera l'origine au milieu de cette ligne dont je représente la longueur par $2l$. Soient d'ailleurs ω et ω' les angles que font respectivement dans chaque ellipse les cordes conjuguées à la direction de la ligne des centres; alors, en prenant pour axe des ordonnées une ligne menée sous l'un de ces angles (soit ω), la condition du problème, c'est-à-dire la relation

$$(k') \pm m(k'') = 2C,$$

en désignant par $2C$ la valeur du module et par m son coefficient de composition, sera la suivante

$$\left(ab\sin\omega\sqrt{\frac{(x-l)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}\right)$$
$$\pm m\left[a'b'\sin\omega'\sqrt{\frac{\left(x+y\dfrac{\sin(\omega'-\omega)}{\sin\omega'}+l\right)^2}{a'^2}+\frac{y^2\sin^2\omega}{b'^2\sin^2\omega'}-1}\right]=2C;$$

a et a' étant les demi-diamètres qui coïncident avec la ligne des centres; b et b' les demi-diamètres respectivement conjugués aux premiers dans l'une et l'autre ellipse.

Cette équation, après avoir été dégagée des radicaux, s'élèvera en général au quatrième degré. Si l'on veut qu'elle se réduise au deuxième, il faut, en écartant quelques circonstances qui sont sans intérêt, poser les conditions :

$$\omega = \omega',$$
$$b = mb',$$
$$a = ma'.$$

C'est-à-dire que les deux courbes adoptées pour bases doivent être semblables et semblablement placées. Et quand on aura introduit ces conditions, le lieu résultant sera une conique ayant son centre sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire sur la ligne des centres des deux bases; conique généralement non semblable aux bases, mais pour laquelle les deux directions ci-dessus choisies comme axes des coordonnées représenteront, aussi bien que dans ces mêmes bases, un système de cordes conjuguées. Quant à la position précise du centre de cette conique sur l'axe des abscisses, elle dépendra en général de la grandeur et de la composition du module, aussi de la grandeur des bases, et enfin de la distance des deux foyers. Seulement, quand les bases sont égales, le centre de la conique est toujours au point qui partage également la distance $2l$. Ces diverses circonstances s'offraient déjà dans les précédentes considérations géométriques; mais elles reçoivent ici un caractère de généralité absolue.

Nous écarterons désormais la considération des modules composés parce qu'elle n'introduit aucune particularité essentielle. Ajoutant donc aux conditions précédentes la relation $m = 1$, l'équation fondamentale ci-dessus prendra la forme

$$\sqrt{\frac{(x-l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} + \sqrt{\frac{(x+l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} = \frac{2C}{ab \sin \omega}, \quad (2)$$

laquelle étant dégagée de radicaux revient à la suivante

$$C^2 a^2 \sin^2 \omega . y^2 + b^2 \sin^2 \omega (C^2 - l^2 b^2 \sin^2 \omega) x^2 = C^2 (C^2 - l^2 b^2 \sin^2 \omega + a^2 b^2 \sin^2 \omega). \quad (3)$$

Pour faire coïncider le lieu géométrique correspondant à (3) avec une conique dont l'équation rapportée à un système de diamètres conjugués sous le même angle ω, soit

$$\frac{y^2}{b_{,}^2} + \frac{x^2}{a_{,}^2} = 1, \quad (4)$$

il faut poser les relations

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = \dfrac{b_{,}^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}}\right) \\ \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{a_{,}^2}{b_{,}^2} - \dfrac{l^2}{b_{,}^2 - b^2} \end{array}\right\}, \quad (5)$$

lesquelles vont nous servir à déterminer sur chaque diamètre d'une conique les dimensions des bases des divers systèmes focaux, d'après la grandeur du module et la situation des foyers.

Et d'abord, on voit par la simple inspection de ces formules, que dans toute section conique, ellipse ou hyperbole, non-seulement deux points quelconques d'un même diamètre symétriquement placés à l'égard du centre peuvent être considérés comme foyers, mais de plus qu'ils peuvent être considérés comme les foyers d'une infinité de systèmes focaux, différant tous les uns des autres par la grandeur du module; et qu'enfin lorsque la grandeur du module est fixée, il y a encore pour les mêmes foyers deux systèmes focaux bien distincts, résultant de la double valeur de b^2 et a^2 dans les formules (5). C'est à proprement parler la discussion de ces deux systèmes focaux relatifs aux mêmes foyers et aux diverses grandeurs possibles du module, qui constitue la théorie générale des foyers dans les sections coniques.

Pour faciliter cette discussion nous appellerons *premier système focal* celui des deux systèmes dans lequel le demi-diamètre de base conjugué à la ligne commune des centres est le plus grand, c'est-à-dire le système dans lequel la valeur de b^2 contient le radical avec le signe $+$; et l'on peut remarquer de suite que quelle que soit la conique (4), la valeur de ce demi-diamètre, dans le premier comme dans le second système focal, est indépendante de la distance des foyers au centre; elle dépend seulement de la grandeur du module, à condition, bien entendu, que les foyers demeurent toujours sur le même diamètre pris ici pour axe des abscisses.

IV.

Application à l'ellipse. — Systèmes focaux à bases hyperboliques.

Nous supposerons en premier lieu que la section conique, ci-dessus marquée par l'équation (4), soit une ellipse; $a_{\prime}^2$ et $b_{\prime}^2$ seront essentiellement positifs, et par suite la valeur du module aura une limite. En effet, pour que les deux bases soient réelles, il faudra que le module $2C$ ne dépasse pas la valeur $a_{\prime}b_{\prime}\sin\omega$; c'est-à-dire il faudra que la valeur attribuée à la somme ou à la différence des deux aires vectrices ne dépasse pas la quatrième partie du rhombe circonscrit à l'ellipse proposée. Tant que le module satisfait à cette condition

$$2C < a_{\prime}b_{\prime}\sin\omega,$$

les deux systèmes focaux sont distincts; mais lorsqu'il atteint la limite

$$2C = a_{\prime}b_{\prime}\sin\omega,$$

ils se confondent en un seul dont les bases ont pour formules

$$b^2 = \frac{b_{\prime}^2}{2},$$

$$a^2 = \frac{a_{\prime}^2}{2} - l^2.$$

D'ailleurs, à ne considérer que la circonstance où les bases sont réelles, on voit que les deux valeurs de b^2 qui résultent de la première des formules (5) sont toujours positives; mais il se peut que les valeurs correspondantes de a^2 soient toutes deux positives, ou toutes deux négatives ; ou enfin que l'une soit positive et l'autre négative. D'où l'on est induit à conclure que les deux systèmes focaux peuvent avoir tous les deux des bases elliptiques, ou tous les deux des bases hyperboliques; ou bien l'un avoir des bases elliptiques et l'autre des bases hyperboliques. Toutefois, avant que de pousser plus loin, il convient d'éclaircir ce résultat de systèmes focaux *à bases hyperboliques*.

Si d'un point quelconque (x,y), extérieur à une hyperbole, on lui mène deux tangentes, et si on joint le centre de la courbe avec les deux points de contact, on formera comme pour l'ellipse un quadrilatère, mais avec ceci de différent que le quadrilatère relatif à l'hyperbole est toujours à angle rentrant. Ceci tient à ce que dans l'ellipse le centre de la courbe et le point de concours de deux tangentes sont toujours l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la corde des contacts; tandis que dans l'hyperbole ils sont toujours d'un même côté de cette ligne. Quoi qu'il en soit, si au lieu de former la superficie de ce quadrilatère, comme dans le cas de l'ellipse, par la somme des deux triangles qui ont pour base commune la corde des contacts et pour sommets respectifs le centre de la courbe et le point de concours des deux tangentes; si, dis-je, dans le cas de l'hyperbole, on fait la différence de ces deux mêmes triangles, on trouvera pour expression algébrique de cette différence

$$ab\sin\omega\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}}$$

lorsque le diamètre $2a$ compté ici sur l'axe des abscisses est un bien

$$ab\sin\omega\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

lorsque ce même diamètre $2a$ est un diamètre imaginaire. Or on voit, dans l'un ou l'autre cas, que cette expression du quadrilatère relatif à l'hyperbole, n'est autre chose que la mesure du quadrilatère relatif à l'ellipse et marqué K' dans le précédent paragraphe, avec cette seule différence qu'on y a changé soit le signe de b^2, soit celui de a^2. Par conséquent le lieu géométrique des points pour lesquels le module formé sur des bases hyperboliques est une quantité constante sera donné exactement par l'équation (3), pourvu qu'on y fasse l'un ou l'autre de ces deux changements. Ou bien encore, si les circonstances qui déterminent le système focal, c'est-à-dire si la grandeur donnée du module avec la distance aussi donnée des foyers, procurent un sens négatif soit aux valeurs de a^2, soit à celles de b^2, dans les formules (5), c'est la marque que les circonstances en question entraînent des bases hyperboliques au lieu de bases elliptiques.

Reprenons maintenant la discussion des formules (5). Comme les deux valeurs de b^2, dans le cas où la conique donnée est une ellipse, sont essentiellement positives, il s'ensuit que dans l'ellipse, lorsque les bases d'un système focal sont hyperboliques, leurs diamètres imaginaires coïncident toujours avec la ligne des foyers. D'ailleurs la condition pour que les bases soient elliptiques, se réduisant à l'inégalité suivante

$$\frac{2l^2-a_{\prime}^2}{a_{\prime}^2} < \mp\sqrt{1-\frac{4C^4}{a_{\prime}^2 b_{\prime}^2 \sin^2\omega}},$$

dans laquelle le signe supérieur du radical se rapporte au premier système focal, on voit que cette condition sera toujours satisfaite à l'égard du second système toutes les fois qu'on aura

$$l < \tfrac{1}{2}a_{\prime}\sqrt{2},$$

quelle que soit d'ailleurs la grandeur du module; c'est-à-dire que le second système focal sera forcément à bases elliptiques toutes les fois que les foyers seront à l'égard du centre en-deçà de la position qui convient à cette limite de l. Mais au-delà de la même limite, le premier système sera nécessairement à bases hyperboliques, et cela quelle que soit aussi la grandeur du module, par la seule raison qu'on aura

$$\frac{2l^2-a_{\prime}^2}{a_{\prime}^2} > 0.$$

Dans le premier cas, c'est-à-dire lorsqu'on a $l < \frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, ce qui assure au second système focal des bases elliptiques, le premier système aura soit des bases elliptiques, soit des bases hyperboliques, selon qu'on aura

$$C^2 > l^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega \left(1 - \frac{l^2}{a_{,}^2}\right),$$

ou bien

$$C^2 < l^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega \left(1 - \frac{l^2}{a_{,}^2}\right).$$

Or, il arrive que l'une et l'autre de ces conditions sont compatibles avec la condition fondamentale de la réalité des bases, qui est la suivante

$$C^2 < \frac{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}{4};$$

seulement la deuxième devient impossible à la limite de $l = 0$. Ainsi « depuis le centre jusqu'à une distance égale à $\frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, le pre-
» mier système focal est indifféremment à bases elliptiques ou à
» bases hyperboliques, suivant la grandeur du module; au lieu que,
» entre ces mêmes limites, le second système est toujours elliptique. »

Dans le cas de $l > \frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, circonstance qui assure au premier système des bases hyperboliques, la condition pour que le second système demeure elliptique sera donnée par

$$C^2 < l^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega \left(1 - \frac{l^2}{a_{,}^2}\right),$$

condition à laquelle on pourra toujours satisfaire, pourvu que le facteur $1 - \frac{l^2}{a_{,}^2}$ ne soit pas négatif. D'ailleurs, on pourrait toujours satisfaire à la condition inverse qui procure au second système des bases hyperboliques; ainsi « quand les foyers sont au-delà de la
» distance $l = \frac{1}{2} a_{,} \sqrt{2}$, le second système peut être indifféremment

» elliptique ou hyperbolique, pourvu toutefois qu'on ne sorte pas » de l'intérieur de la courbe; car, pour tous les points du diamètre » qui sont extérieurs à l'ellipse, les deux systèmes focaux sont tou- » jours à bases hyperboliques. »

Après avoir ainsi étudié les systèmes focaux par rapport à la nature des bases, si l'on cherche à savoir dans quelles circonstances ils sont uniformes et dans quelles ils sont bifides, on trouve encore que ces circonstances deviennent indépendantes de la grandeur du module pour certaines situations des foyers. Afin de s'en assurer, il faut effectuer le calcul des deux aires vectrices qui sont respectivement représentées par

$$ab \sin\omega \sqrt{\frac{(x-l)^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1}, \quad \text{et par} \quad ab \sin\omega \sqrt{\frac{(x+l)^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1}.$$

Or, en faisant attention que x et y doivent satisfaire à l'équation (4), dans laquelle a'^2 et b'^2 seront données en fonction de a^2 et de b^2 par la comparaison de cette même équation (4) avec (3), on pourra transformer ces deux expressions dans les suivantes :

$$C - x\,\frac{lb^2 \sin^2\omega}{C}, \quad \text{et} \quad C + x\,\frac{lb^2 \sin^2\omega}{C};$$

dont la première se rapporte à la base qui a son centre du côté des x positifs.

Je prie le lecteur de remarquer en passant que chacune des deux aires vectrices se trouve exprimée *en fonction rationnelle de l'abscisse;* ce qui confirmerait au besoin l'analogie fondamentale sur laquelle reposent ces recherches.

Comme tout est symétrique de chaque côté du centre, il suffira de discuter la formation du module pour les divers points de la conique qui sont d'un même côté, soit par exemple du côté des x positifs. Or on peut toujours concevoir x assez petit pour que la première des expressions ci-dessus soit positive; et comme la seconde l'est toujours quel que soit x, il s'ensuit que jusqu'à une certaine distance de l'axe des ordonnées, le module se composera toujours *de la somme* des aires vectrices. Mais, si x augmente jusqu'à rendre

$x\frac{lb^2 \sin^2 \omega}{C}$ plus grand que C, alors celle des deux aires dont la base est du côté des x positifs a pour valeur l'expression suivante

$$x\frac{lb^2 \sin^2 \omega}{C} - C;$$

et il est clair que, pour former le module, il faut *la retrancher* de l'autre aire. Le point où le module change de forme a donc pour abscisse la valeur de x qu'on tire de l'équation

$$x\frac{lb^2 \sin^2 \omega}{C} - C = 0,$$

dans laquelle il faudra mettre pour b^2 sa valeur en fonction de $a_{,}^2$ et $b_{,}^2$; ce qui donne

$$x = \frac{2C^2}{lb_{,}^2 \sin^2 \omega\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}}\right)}.$$

Mais comme les points à l'égard desquels il y a lieu de former le module sont tous sur la conique représentée par l'équation (4), le système sera uniforme ou sera bifide, suivant que cette valeur de x sera plus grande ou plus petite que $a_{,}$. Cela conduit aux résultats suivants :

« A partir du centre d'une ellipse jusqu'à la distance $\frac{a_{,}}{2}$ mesurée
» sur le diamètre dont la longueur est $2a_{,}$, le premier système focal
» peut être indifféremment uniforme ou bifide selon la grandeur du
» module ; mais au-delà il est constamment bifide. Quant au second
» système focal, il peut être uniforme ou bifide selon la grandeur du
» module, quelle que soit d'ailleurs la situation des foyers. »

V.

Suite de l'application à l'ellipse. — Systèmes focaux du second genre.

Les systèmes focaux d'une même conique peuvent différer entre eux par une circonstance beaucoup plus importante que toutes celles que nous avons étudiées jusqu'ici; et cette circonstance mérite d'autant plus d'être considérée, que si l'on n'en tenait pas compte il serait impossible de posséder toutes les analogies dont la théorie des foyers est susceptible.

On voit bien que si on change le signe de C^2 dans l'équation (3), il en résulte un nouveau lieu géométrique; ou bien si après avoir fait ce changement, on identifie encore l'équation (3) avec (4), il en résulte de nouvelles valeurs pour les quantités a^2 et b^2 données par les formules (5); c'est-à-dire que les bases reçoivent alors une nouvelle forme. Mais changer le signe de C^2 dans (3), c'est la même chose que changer le signe de toutes les quantités sous les radicaux dans l'équation (2); et, pour interpréter ce dernier changement de signe par rapport à la théorie des systèmes focaux, il faut connaître la signification géométrique des radicaux ainsi transformés.

Or, comme l'expression $\left[ab \sin \omega \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - 1}\right]$ était la mesure de la superficie d'un certain quadrilatère dont la formation a été donnée ci-dessus dans le paragraphe IV, il arrive que l'expression $\left[ab \sin \omega \sqrt{1 - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2}}\right]$, différant de la précédente par le signe de la quantité sous le radical, représente la mesure de superficie d'un nouveau quadrilatère toujours relatif à la base elliptique dont les demi-diamètres sont a et b, mais formé d'une façon très différente.

Dans cette seconde sorte de quadrilatère, le point (xy) doit être pris *intérieurement* à l'ellipse; aussi ne représente-t-il plus le point de concours de deux tangentes, ni l'un des sommets du quadrilatère vecteur: il se trouve à l'intersection des diagonales de ce quadrilatère. L'une des diagonales est le rayon elliptique qui passe par le point en question, et l'autre est une corde conjuguée à ce rayon. Ainsi l'un des sommets est toujours au centre de la base, lequel demeurant fixe quand le point (xy) vient à changer de position, conserve par-là le caractère de pivot ou foyer. Mais les trois autres sommets du quadrilatère sont constamment sur le contour de la base. D'ailleurs, si dans cette même expression du nouveau quadrilatère vecteur on change le signe de a^2 ou celui de b^2, on aura la mesure d'un quadrilatère relatif à l'hyperbole; celui-ci résultant *de la différence* des deux triangles qui ont leurs sommets, l'un au centre de la base hyperbolique, l'autre à la rencontre de cette courbe avec le rayon vecteur mené au point intérieur (x, y); et dont la base commune est la corde conjuguée à ce rayon vecteur, menée par le même point (x, y).

Ces quadrilatères, que j'appellerai *de second genre*, et qui sont relatifs à des points placés dans la concavité de la base (elliptique ou hyperbolique), sont analogues à ceux que nous avions considérés d'abord et qui étaient relatifs à des points extérieurs. Et de même que, parmi tous les points qui sont à la fois extérieurs à deux ellipses ou à deux hyperboles, on a pu chercher le lieu géométrique de tous ceux pour lesquels la somme ou la différence des quadrilatères de premier genre forme un module constant, on peut aussi se proposer le problème de chercher, parmi tous les points qui sont intérieurs à la fois à deux ellipses ou à deux hyperboles, le lieu géométrique de ceux pour lesquels la somme ou la différence des quadrilatères de second genre constitue aussi un module constant. Dans ce dernier cas les deux courbes données seraient à l'égard du lieu cherché les bases d'un *système focal du second genre*. Et, pour que le lieu cherché fût en effet une section conique, on trouverait d'abord les mêmes conditions que dans la recherche relative aux systèmes de premier genre; c'est-à-dire qu'il faut que les bases soient semblables et semblablement placées sur la ligne qui joint leurs centres. D'ailleurs la conique correspondante aurait également son centre situé sur la même ligne; et enfin, dans le cas d'un système à module simple, l'équation de cette conique serait la suivante

$$C^2a^2\sin^2\omega . y^2 + b^2\sin^2\omega(C^2 + l^2b^2\sin^2\omega)x^2 = C^2[(a^2 - l^2)b^2\sin^2\omega - C^2], \quad (3\ bis)$$

ce qui est précisément l'équation (3), relative aux systèmes du premier genre, mais dans laquelle on a changé le signe de C^2; de sorte que si l'on veut faire coïncider le lieu géométrique qui correspond à (3 *bis*) avec la conique de l'équation (4), il faudra déterminer les bases par le moyen des formules (5), en ayant l'attention d'y changer aussi le signe de C^2; ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \frac{1}{2} b_{,}^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}}\right), \\ \frac{a^2}{b^2} &= \frac{a_{,}^2}{b_{,}^2} - \frac{2l^2}{b_{,}^2 \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4C^2}{a_{,}^2 b_{,}^2 \sin^2 \omega}}\right)} \end{aligned}\right\} . \qquad (5\ bis)$$

D'après cela, en renouvelant par rapport à un diamètre quelconque de l'ellipse la discussion précédente, on établira sans peine les résultats suivants :

« Le premier des deux systèmes focaux de second genre, relatifs » à une grandeur donnée du module et à une situation particulière » des foyers, est toujours réel et toujours à bases elliptiques. D'ailleurs » il peut être indifféremment bifide ou uniforme selon la grandeur » du module.

» Le second système focal de second genre est toujours à bases » hyperboliques, mais il n'existe pas partout. Notamment ses bases » deviennent idéales pour tous les foyers qui sont à une distance » du centre moindre que $a_{,}$; et au-delà de cette limite, il faut » encore pour la réalité des bases que le module ne dépasse pas une » certaine valeur dépendant de la distance au centre. Enfin le second » système de second genre peut être bifide partout où il existe, mais » il ne peut être uniforme que si la distance des foyers au centre de » la conique est plus petite que $\frac{1}{2} a_{,}(1 + \sqrt{5})$. »

Il faut remarquer d'ailleurs que les bases hyperboliques de second genre ont leurs diamètres transverses coïncidant toujours avec la ligne des centres; et ce, contrairement aux bases hyperboliques du premier genre qui ont toujours, comme on l'a vu, leur diamètre transverse parallèle aux ordonnées, c'est-à-dire à la direction qui est conjuguée avec la ligne des centres. On se rendra facilement compte de cette différence par la considération que les bases de second genre doivent renfermer dans leur concavité l'ellipse ou plus généralement la conique proposée, tandis que le contraire a lieu pour les bases de premier genre.

VI.

Propriétés spéciales des systèmes à bases circulaires.

Il serait facile d'étendre la discussion précédente à l'hyperbole (et même à la parabole, à l'aide de cette propriété que l'aire vectrice est toujours, comme nous l'avons fait voir, une fonction rationnelle de l'abscisse); mais ce qui précède suffit pour justifier ce que j'ai avancé en commençant, que tout point d'un diamètre quelconque d'une conique peut être considéré comme un vrai foyer; nous avons vu même qu'à chaque couple de foyers correspond une infinité de systèmes focaux très divers.

Maintenant il convient d'examiner plus particulièrement les lois des systèmes focaux dont les bases sont circulaires, ces systèmes jouissant tous de la propriété remarquable que leur module, quel que soit le genre auquel ils appartiennent, peut être pris si l'on veut sous la forme linéaire. Ainsi dans les systèmes circulaires du premier genre, le module linéaire résulte, comme on l'a vu ci-dessus, de la somme faite ou de la différence de deux tangentes menées de chaque point de la conique aux deux cercles de base; et dans les systèmes circulaires de second genre, il est égal à la somme ou à la différence des deux cordes respectivement construites dans chaque cercle de base en menant par chaque point de la conique une perpendiculaire aux deux rayons de ces mêmes bases. Discutons donc de ce point de vue les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole.

Par les formules (5) on connaîtra que dans l'ellipse les systèmes focaux de premier genre à bases circulaires sont exclusivement sur le grand axe, tandis qu'au contraire les systèmes circulaires de second genre [par (5 *bis*)] sont tous sur le petit axe. Et comme les systèmes de premier genre sont bifides toutes les fois que les foyers se trouvent à l'égard du centre en-deçà des centres de courbure qui correspondent aux sommets principaux de la courbe; ainsi les systèmes du second genre sont bifides quand leurs foyers sont en-deçà des centres de courbure relatifs aux sommets du petit axe. De là une propriété digne de remarque commune à tous les cercles qui, ayant leurs centres sur l'un des axes, sont tangents à la courbe; seulement cette propriété éprouve une modification essentielle quand on passe de l'un à l'autre des axes. De plus, au-delà des centres de courbure des sommets principaux sur l'axe principal, ou des seconds sommets sur le second axe, il y a encore des systèmes circulaires. Mais à partir du centre de courbure du sommet principal, les bases relatives au grand axe vont toujours en diminuant jusqu'à la distance qui est propre aux foyers ordinaires; et au-delà il n'y a plus de systèmes circulaires. Au contraire sur le second axe il y a toujours un système circulaire (du second genre), quelle que soit la position des foyers; et la grandeur des bases y augmente indéfiniment à partir du centre.

Dans l'hyperbole on retrouvera d'abord, par le moyen des formules (5) appropriées à ce genre de courbe, les systèmes circulaires de premier genre relatifs à des foyers situés sur l'axe transverse, systèmes dont nous avons déjà reconnu l'existence et les propriétés par des considérations géométriques. Mais on verra de plus que deux points quelconques du second axe sont foyers d'un système circulaire du premier genre, lequel est toujours bifide et conséquemment très facile à construire. Ainsi, en considérant la forme linéaire du module, on pourra exprimer dans l'hyperbole comme dans l'ellipse, une propriété commune à tous les cercles qui, ayant leurs centres sur l'un des deux axes, sont tangents à la courbe. Mais dans l'hyperbole cette propriété demeure la même à l'égard des deux axes, le module s'y formant toujours de la somme ou de la différence des tangentes menées d'un point de la courbe aux deux cercles de base. En outre, il ne faut pas oublier que sur l'axe transverse de l'hyperbole, notamment dans la longueur comprise entre les foyers ordinaires et les centres de courbure aux sommets, il y a, comme pour l'ellipse, certains cercles qui ne touchent pas la courbe et qui présentent nénamoins la propriété indiquée ci-dessus. Quant aux systèmes circulaires de second genre, il n'en existe aucun dans l'hyperbole, pas plus sur le premier que sur le second axe; et c'est ce dont il était facile de se convaincre *à priori* et abstraction faite des formules, puisque, en règle générale, les bases du second genre embrassent toujours la conique proposée dans l'intérieur de leur concavité. Aussi trouve-t-on que, par rapport à l'hyperbole, toutes les bases du second genre sont hyperboliques.

VII.

Des foyers ordinaires et des contre-foyers.

Nous pouvons maintenant expliquer la signification propre des foyers ordinaires dans la théorie générale des foyers. On y doit considérer ces points remarquables comme les foyers d'un système circulaire du premier genre dont les bases sont évanouissantes. Et ce peu de mots fait bien comprendre pourquoi il n'existe de tels points que sur l'axe principal. En effet, dans l'ellipse le second axe n'a de systèmes circulaires que du second genre, et les systèmes circulaires de premier genre qui sont propres au second axe de l'hyperbole ont leurs bases toujours tangentes à cette courbe, de sorte que ces bases ne peuvent jamais y devenir évanouissantes.

Nous pouvons aussi décider la question de savoir s'il existe quelques points qui soient analogues aux foyers ordinaires.

Premièrement, en considérant l'analogie de l'hyperbole équilatère ou hypercle (*) avec le cercle, on est induit à chercher s'il existe sur les axes d'une conique des points que l'on puisse considérer comme les foyers d'un système hyperciclique à bases évanouissantes, en remarquant d'ailleurs qu'une hyperbole évanouissante ne se réduit pas à un point comme l'ellipse, mais à un système de deux droites. Pour cela il faut supposer dans les formules (5) les conditions suivantes :

$$\sin\omega = 1,\quad b^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a^2}{b^2} = -1.$$

(*) Je crois pouvoir employer ce nom d'*hypercle* qui m'a paru très propre à désigner l'hyperbole équilatère en rappelant son analogie avec le cercle. Lorsque je parlerai de *systèmes hyperciliques*, on entendra donc que je veux parler de systèmes focaux ayant pour bases des hyperboles équilatères. J'emploie le mot hyperciclique et non pas *hyperculaire*, parce qu'il faut considérer le mot hypercle comme contracté d'*hypercicle*, et non pas d'*hyper-cercle* que les lois étymologiques repousseraient.

De là il sera facile de déduire, tant pour l'ellipse que pour l'hyperbole, la situation des points en question que j'appelle *contre-foyers*.

On trouvera pour l'ellipse

$$l^2 = a_1^2 + b_1^2;$$

de sorte que dans cette sorte de conique la réalité des contre-foyers ne dépend pas de la valeur relative des axes; ils existent aussi bien sur le petit axe que sur l'axe principal et, si l'ellipse proposée devient un cercle, tous les diamètres en possèdent deux.

Pour l'hyperbole, la situation des contre-foyers est donnée par

$$l = a_1^2 - b_1^2, \quad \text{ou bien} \quad l^2 = b_1^2 - a_1^2,$$

suivant que l'axe $2a_1$ par lequel nos formules désignent toujours celui qui porte les deux foyers, rencontre le périmètre de la courbe ou ne le rencontre pas. Dans la première des formules précédentes a_1 représente la longueur du demi-diamètre transverse, au lieu que dans la seconde ce demi-diamètre est représenté par b_1. Et de là il est facile de conclure que l'hyperbole peut être dépourvue de contre-foyers, ou bien en posséder quatre comme l'ellipse. Elle en est dépourvue si l'axe transverse est plus petit que le second axe; dans le cas contraire, chacun des axes en possède deux comme dans l'ellipse.

Si dans une ellipse on se représente les contre-foyers par les points (A, A) sur l'un des axes et par (B, B) sur l'autre axe, on remarquera que les quatre droites qui représentent deux à deux les hypercles évanouissants relatifs aux contre-foyers (A, A), représentent aussi, mais combinées convenablement, les hypercles relatifs aux contre-foyers (B, B). D'ailleurs ces droites sont toujours tangentes à l'ellipse.

Dans une hyperbole douée de contre-foyers on observera des circonstances tout-à-fait semblables.

Quant à la propriété caractéristique des contre-foyers, elle reçoit une expression digne de remarque si on considère la valeur générale du module et si on y écrit les conditions qui caractérisent un système hyperciclique à bases évanouissantes.

La valeur générale du module est la suivante

$$ab\sin\omega\left(\sqrt{\frac{(x-l)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}\pm\sqrt{\frac{(x+l)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1}\right)=2C,$$

dans laquelle a et b représentent, comme à l'ordinaire, les demi-diamètres des bases. Nous y conservons le double signe par la raison que les droites auxquelles se réduisent les hypercles évanouissants étant toujours tangentes à la conique, le module correspondant est toujours bifide. De plus, en introduisant les conditions du système hyperciclique à bases évanouissantes, il faut considérer que la supposition $b=0$ rendra nul le module $2C$. Mais le rapport $\frac{2C}{b}$ demeure fini et égal à une quantité constante. En représentant cette quantité par k, le résultat des substitutions indiquées donnera finalement

$$\left[\sqrt{(\sqrt{a_1^2+b_1^2}+x)^2-y^2}\right]\pm\left[\sqrt{(\sqrt{a_1^2+b_1^2}-x)^2-y^2}\right]=k.$$

Si la conique proposée est une ellipse il faut conserver à a_1^2 et b_1^2 leurs signes positifs; si c'est une hyperbole on prendra négativement celle des deux quantités qui se rapporte à l'axe imaginaire, en se rappelant toujours que la lettre a_1 est relative à celui des axes qui porte les contre-foyers, que ce soit ou non l'axe réel.

L'équation précédente exprime, tant pour l'ellipse que pour l'hyperbole, une propriété susceptible d'une représentation graphique très simple. Si on construit sur l'axe d'une conique deux demi-cercles ayant pour diamètres les distances comptées sur cet axe entre le pied d'une ordonnée et les deux contre-foyers relatifs au même axe, demi-cercles qui se toucheront toujours extérieurement dans le cas de l'ellipse; et si, par un arc décrit du pied de l'ordonnée comme centre, on marque dans chacun d'eux une corde égale à cette ordonnée, la somme ou bien la différence des deux cordes supplémentaires sera une quantité constante, savoir la somme pour tout point dont l'abscisse est plus petite que $\frac{a_1^2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$; et la différence si l'abscisse est plus grande. De plus la valeur de cette quantité constante est toujours égale à $2a_1$, c'est-à-dire au diamètre sur lequel sont les contre-foyers que l'on considère ; circonstance qui confirme pleinement l'analogie des contre-foyers avec les foyers ordinaires.

On peut encore considérer comme particulièrement analogues aux foyers ordinaires les points d'un diamètre quelconque pour lesquels le système focal est à bases évanouissantes, avec la circonstance que le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ soit égal à l'unité. Pareillement sur un diamètre quelconque on pourra chercher les analogues des contre-foyers, c'est-à-dire les points pour lesquels, les bases étant évanouissantes, le rapport $\frac{a^2}{b^2}$ est égal à -1. Le lieu de ces derniers points, tant dans l'ellipse que dans l'hyperbole, est toujours un cercle, mais il n'existe dans l'hyperbole que sous la condition ci-dessus indiquée pour la réalité des contre-foyers. Quant au lieu géométrique des points analogues aux foyers ordinaires, il dépend d'une courbe du quatrième degré qui est comprise tout entière dans le cas de l'ellipse entre les deux diamètres conjugués égaux, et dans le cas de l'hyperbole entre les deux asymptotes (*) ; de sorte que ces points ne se retrouvent pas indifféremment sur tous les diamètres.

Si on accepte les analogies précédentes il faudra reconnaître, dans les surfaces de second ordre qui sont de révolution, l'existence des contre-foyers.

Ainsi l'ellipsoïde de révolution qui peut manquer de foyers ordinaires a toujours ses deux contre-foyers. L'hyperboloïde de révolution à une nappe ou à deux nappes possède deux contre-foyers ou n'en possède pas, selon que l'axe réel de la génératrice surpasse en grandeur absolue l'axe imaginaire ou lui est inférieur. Enfin le paraboloïde de révolution a son contre-foyer placé sur l'axe, à la même distance du sommet que le foyer ordinaire.

S'il s'agit d'une surface quelconque du second ordre, concevons toutes les sections qu'il est possible d'y former par les divers plans qui contiennent un même diamètre. Deux points fixes de ce diamètre

---

(*) Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le lieu en question est une autre hyperbole équilatère.

pourront être les foyers communs de divers systèmes focaux propres à chacune de ces sections. Et si l'on conçoit que pour ces systèmes le module soit le même, alors le lieu des bases sera une surface déterminée à l'aide de laquelle tous les points de la proposée se trouveront liés par une relation uniforme. De sorte qu'on pourra considérer deux points quelconques d'un diamètre d'une surface du second ordre comme jouissant d'une propriété analogue à celle des foyers. Mais la surface des bases est en général du sixième degré; seulement elle devient une surface du second ordre et de révolution, quand la proposée est elle-même de révolution, et quand les foyers sont pris sur l'axe.

NOTE. Quand on considère la définition qu'Euler a donnée pour les foyers: « Des » points tels que leur distance à chacun des points de la conique soit une fonction » rationnelle de l'abscisse », et quand d'ailleurs on envisage la propriété caractéristique des deux foyers pris simultanément, on peut être porté à croire que la *généralisation de la théorie des foyers* consisterait à définir ces deux points par la condition que la somme ou la différence de leurs distances à un même point de la conique soit une quantité non plus constante, mais exprimée rationnellement en fonction de l'abscisse. Admettant hypothétiquement que de tels points existassent, et que le coefficient de l'abscisse dans la fonction en question dépendît de leur situation, on pourrait imaginer que ce coefficient fût susceptible de s'annuler pour la situation propre aux foyers ordinaires; ce qui en effet rattacherait ces deux points à une loi générale. Mais il est facile d'apprécier en peu de mots la valeur de cette hypothèse.

Concevons une conique située d'une manière quelconque sur le plan des coordonnées, et proposons-nous la question de savoir s'il existe deux, ou plusieurs points tels que la somme de leurs distances, à un point quelconque de cette conique, soit une fonction rationnelle de l'abscisse et de l'appliquée, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$A + Bx + Cy.$$

Si de tels points existaient, en considérant les points qui leur seraient symétriques à l'égard du centre de la courbe, on verra sans peine que la somme des distances du point (x, y) à ces nouveaux foyers serait exprimée par

$$A + 2(B\xi + C\eta) - (Bx + Cy).$$

formule dans laquelle je représente par η et ξ les coordonnées du centre. D'où il suit que la somme totale des distances d'un point quelconque de la conique, tant aux premiers qu'aux nouveaux foyers, serait une quantité constante. Mais on sait bien que les foyers ainsi entendus ne peuvent pas être au nombre de plus de deux. Il sera facile d'approprier ce genre de démonstration à la parabole. Je me borne à faire remarquer que si au lieu de chercher sur le plan d'une conique des points tels que la somme de leurs distances à un point quelconque de cette conique soit une fonction rationnelle de l'abscisse et de l'ordonnée, on demandait s'il existe des cercles tels que la somme des tangentes menées à chacun d'eux depuis un point quelconque de la conique fût une telle fonction, on en trouverait une infinité que notre théorie enseigne à construire. — J'ajouterai aussi que toutes les courbes de degré supérieur qui admettent une génération par *fils tendus* (c'est-à-dire les courbes telles que la somme algébrique (simple ou composée) des distances de chacun de leurs points à un certain nombre de foyers soit constante, courbes proposées pour la première fois par Tschirnhausen) admettent aussi une génération par des tangentes vectrices menées à autant de cercles qu'elles ont de simples foyers, ou bien par des aires vectrices construites sur autant de sections coniques considérées comme *bases;* et cela d'une infinité de façons pour une même courbe.