JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 423-456.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__423_0>

MÉMOIRE

Sur l'intégration d'une classe d'Équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites;

Par J. LIOUVILLE.

INTRODUCTION.

Étant donnée une équation différentielle d'un ordre quelconque entre deux variables y et x, on peut se demander s'il existe ou non une intégrale particulière de la forme $y =$ *une fonction finie explicite* de x, c'est-à-dire une intégrale où la valeur de y en x se trouve écrite à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques. La solution de cette question paraît offrir de grandes difficultés. Les méthodes proposées par Condorcet pour y parvenir indiquent sans doute le génie pénétrant de cet illustre géomètre; mais elles sont loin d'être fondées sur des principes tout-à-fait rigoureux. Les raisonnements de l'auteur sont en général incomplets ou obscurs, et les conclusions qui en dérivent manquent quelquefois d'exactitude.

Mes recherches sur la classification des transcendantes (*) m'ayant naturellement conduit à m'occuper de l'intégration des équations différentielles en quantités finies, j'ai obtenu quelques résultats dignes, si je ne me trompe, de l'attention des géomètres. Je me bornerai dans ce Mémoire à traiter le cas particulier où l'équation dont y dépend est de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Py,$$

(*) Tome II de ce Journal, page 56, et tome III, page 523.

P désignant un polynome entier $ax^{s} + bx^{s-1} + \ldots + hx + k$.

Je prouve que si l'équation (1) possède une intégrale exprimable en fonction finie explicite de x, on devra pouvoir y satisfaire en prenant

$$y = e^{\int t dx},$$

et désignant par t une fonction de x algébrique et rationnelle déterminée par l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = \mathrm{P}.$$

Pour qu'une telle valeur de t ait lieu, il faut d'abord que le degré du polynome P soit un nombre pair 2ν. Cela étant j'extrais autant que possible la racine carrée de P; je représente cette racine par Q et le reste par R, ou autrement dit, je mets P sous la forme $\mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}$, Q étant un polynome de degré ν dont le premier terme est $x^{\nu}\sqrt{a}$ et R un polynome de degré $(\nu - 1)$ tout au plus. La valeur de t, si elle existe, se composera de deux parties, l'une entière et égale soit à Q, soit $-\mathrm{Q}$, l'autre fractionnaire et de la forme

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots + \frac{1}{x-r}.$$

Dans le cas où Q forme la partie entière de t, on fera

$$\int \mathrm{Q} dx = \lambda, \quad \text{et} \quad (x-p)(x-q)\ldots(x-r) = \mathrm{Y},$$

et l'on aura

$$y = \mathrm{Y} e^{\int \mathrm{Q} dx} = \mathrm{Y} e^{\lambda},$$

valeur qui substituée dans l'équation (1) donne

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + 2\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \mathrm{R}\right)\mathrm{Y} = 0.$$

Si la partie entière de t est au contraire égale à $-\mathrm{Q}$, on changera Q en $-\mathrm{Q}$ et λ en $-\lambda$, puis en nommant Z un polynome entier, on trouvera

$$y = \mathrm{Z} e^{-\int \mathrm{Q} dx} = \mathrm{Z} e^{-\lambda}$$

et

$$(B)\qquad \frac{d^2Z}{dx^2} - 2Q\frac{dZ}{dx} - \left(\frac{dQ}{dx} + R\right)Z = 0.$$

Tout se réduit donc à chercher un polynome entier, Y ou Z qui vérifie l'équation (A) ou l'équation (B).

Soit a' le coefficient du terme de R où x est élevée à la puissance $(\nu - 1)$, a' se réduisant à zéro quand ce terme manque dans R. Pour que le polynome Y existe, il faut que

$$\frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

soit un nombre entier nul ou positif; de même pour que le polynome Z existe, il faut que

$$-\frac{a' + \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

soit un nombre entier nul ou positif. Mais la somme de ces deux quantités est égale à $-\nu$. En exceptant donc le cas où $\nu = 0$, on voit que l'une au moins des deux quantités écrites ci-dessus sera nécessairement négative, et que la fonction Y ou Z qui lui correspond sera impossible sous forme entière. Afin de pouvoir continuer le calcul, admettons que l'une d'elles, la première par exemple, remplisse la condition exigée; c'est elle qui représentera le degré i du polynome Y: on posera donc

$$Y = A_i x^i + A_{i-1}x^{i-1} + \ldots\ldots + A_0,$$

et la méthode des coefficients indéterminés suffira pour fournir les valeurs de A_i, $A_{i-1}, \ldots A_0$, ou pour montrer qu'elles sont impossibles. Dans ce dernier cas, l'équation (1) n'a pas d'intégrale qui puisse s'exprimer en fonction finie explicite de x: dans le premier on satisfait à cette équation (1) en prenant $y = Ye^{\lambda}$, mais l'intégrale complète, savoir

$$y = AYe^{\lambda} + BYe^{\lambda}\int\frac{e^{-2\lambda}dx}{Y^2},$$

ne se réduit pas à une fonction finie explicite de x; elle n'est exprimable sous forme finie qu'à l'aide du signe $\int$ dont on ne peut pas la débarrasser. Le seul cas où $\nu = 0$ fait exception; l'équation devenant alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay,$$

son intégrale

$$y = Ae^{x\sqrt{a}} + Be^{-x\sqrt{a}}$$

ne renferme que des exponentielles.

Les théorèmes que je viens d'énoncer sont démontrés en détail dans mon Mémoire. Pour suivre avec facilité les raisonnements que je développe, il faut avoir lu les premiers numéros du Mémoire sur la classification des transcendantes que j'ai rappelé plus haut, et où j'ai posé les bases de la théorie des fonctions finies : surtout il est nécessaire de se rappeler la signification constante que nous donnons aux mots *fonction algébrique* et *fonction finie explicite*. Nous répéterons donc ici qu'une fonction y de x est dite *algébrique*, lorsqu'elle peut être regardée comme la racine d'une équation de la forme

$$y^m - Ly^{m-1} - \ldots - My - N = 0,$$

L, ...M, N étant des polynomes entiers ou des fractions rationnelles en x : il importe peu que cette racine soit exprimable ou non par radicaux : en adoptant généralement le signe $\varpi(x)$ pour la représenter, on voit que toutes les fonctions algébriques deviennent explicites. Il n'en est pas de même des fonctions finies qui peuvent être implicites ou explicites. Les fonctions finies explicites (les seules que je considère dans le présent Mémoire) comprennent toutes les fonctions qui peuvent s'écrire en employant un nombre limité de fois les signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, c'est-à-dire les signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$. Les plus simples d'entre elles sont algébriques. On nomme *fonctions transcendantes* celles qui ne sont pas algébriques. Lorsque dans l'expression d'une fonction non algébrique les caractéristiques transcendantes ne portent que sur des quantités algébriques, la fonction est dite de *première espèce*. Lorsque dans l'expression d'une fonction qui n'est ni algébrique ni réductible à la première espèce, les caractéristiques transcendantes ne portent que sur des transcendantes de première espèce, la fonction est dite de *deuxième espèce*, et ainsi de suite.

Telles sont les définitions dont nous faisons usage et que l'on ne doit jamais perdre de vue si l'on veut comprendre nos démonstrations.

---

1. Nous considérons dans ce Mémoire l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y, \tag{1}$$

où P désigne une fonction rationnelle et entière

$$ax^\varepsilon + bx^{\varepsilon-1} + \ldots + hx + k:$$

ε est un nombre entier > 0 et $a, b, \ldots h, k$ sont des constantes dont la première diffère essentiellement de zéro tandis que les autres peuvent être nulles. Il s'agit de trouver une méthode certaine pour décider si l'on peut satisfaire à l'équation (1) par une intégrale particulière de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, et pour obtenir cette intégrale lorsqu'elle existe en effet sous la forme dont nous venons de parler. Mais avant d'entrer en matière, il importe de rappeler quelques propositions bien connues de calcul intégral dont nous ferons un fréquent usage.

2. Lorsqu'on connaît une fonction y_1 de x qui mise au lieu de y dans l'équation (1) vérifie cette équation, il devient facile de trouver la valeur complète de y. Si l'on combine en effet les deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}y,\quad \frac{d^2y_1}{dx^2} = \mathrm{P}y_1$$

de manière à éliminer P, on en déduit

$$y_1\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{d^2y_1}{dx^2} = 0.$$

Intégrant et désignant par C une constante arbitraire, on a ensuite

$$(2) \qquad y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = \mathrm{C},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(3) \qquad d\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{\mathrm{C}dx}{y_1^2}.$$

Une seconde intégration donnera donc

$$(4) \qquad y = \mathrm{C}'y_1 + \mathrm{C}y_1 \int \frac{dx}{y_1^2},$$

C′ étant une nouvelle constante arbitraire.

3. Soit y_2 une seconde valeur particulière de y : cette valeur devra vérifier l'équation (2) pourvu que l'on attribue à la constante arbitraire C une valeur convenable C″. Entre deux valeurs particulières de y, savoir y_1, y_2, on a donc toujours une relation de la forme

$$(5) \qquad y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = \mathrm{C}''.$$

Quand la constante C″ est nulle, on a simplement

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{y_2}{y_1} = \text{constante}.$$

On dit alors que les deux intégrales y_1, y_2 rentrent l'une dans l'autre. Dans tout autre cas ces intégrales particulières sont distinctes, et l'on peut s'en servir pour former l'intégrale complète. Il suffit pour cela de mettre l'équation (5) sous la forme

$$d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{\mathrm{C}''dx}{y_1^2}:$$

en la comparant à l'équation (3) et posant $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}''} = \mathrm{B}$, on en conclut

$$d\left(\frac{y}{y_1}\right) = \mathrm{B}d\left(\frac{y_2}{y_1}\right),$$

ce qui, par une intégration, donne

$$(6) \qquad y = \mathrm{A}y_1 + \mathrm{B}y_2,$$

A étant aussi bien que B une constante arbitraire.

4. Représentons par $y_1, y_2, \ldots . y_m$ des intégrales particulières de l'équation (1), et posons

$$u = y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_m^\mu = \Sigma\,(y^\mu).$$

Quel que soit le nombre m et quelle que soit la nature de ces intégrales particulières, si l'exposant μ est entier et positif, la valeur de u satisfera à une équation différentielle linéaire de l'ordre $\mu + 1$ qu'il est aisé de former. En différenciant la valeur de u et posant

$$\sum\left(\mu y^{\mu-1}\frac{dy}{dx}\right) = u',$$

on a d'abord

$$(a) \qquad \frac{du}{dx} = u'.$$

En différenciant la valeur de u' et posant

$$\sum\left[\mu(\mu-1)y^{\mu-2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = u'',$$

après avoir remplacé $\frac{d^2y}{dx^2}$ par sa valeur $\mathrm{P}y$, on a ensuite

$$(b) \qquad \frac{du'}{dx} = \mu\mathrm{P}u + u''.$$

Différencions de même la valeur de u'', remplaçons $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $\mathrm{P}y$ et posons

$$\sum\left[\mu(\mu-1)(\mu-2)y^{\mu-3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = u''';$$

il nous viendra

$$(c) \qquad \frac{du''}{dx} = 2(\mu - 1)\mathrm{P}u' + u''',$$

et ainsi de suite, de sorte qu'en faisant

$$\sum\left[\mu(\mu - 1)\ldots(\mu - i + 1)y^{\mu-i}\left(\frac{dy}{dx}\right)^i\right] = u^{(i)},$$

on aura généralement

$$\frac{du^{(i+1)}}{dx} = (i+1)(\mu - i)\mathrm{P}u^{(i)} + u^{(i+2)}.$$

Les quantités $u^{(i)}$ seront d'ailleurs nulles dès que l'indice i atteindra ou surpassera la valeur $(\mu + 1)$: donc entre les $(\mu + 1)$ quantités $u, u', u'', \ldots u_{(\mu)}$, on aura $(\mu + 1)$ équations linéaires du premier ordre (a), (b), (c),.... dont la dernière sera

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu \mathrm{P}u^{(\mu-1)}.$$

En éliminant u', u'',... $u^{(\mu)}$ entre ces équations, ce qui est facile, on formera l'équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu + 1)$ à laquelle u doit satisfaire. Si l'on a $\mu = 1$, cette équation sera l'équation (1) elle-même. Si l'on a $\mu = 2$, il faudra éliminer u', u'' entre les trois équations

$$\frac{du}{dx} = u', \quad \frac{du'}{dx} = 2\mathrm{P}u + u'', \quad \frac{du''}{dx} = 2\mathrm{P}u',$$

ce qui donnera

$$\frac{d^3u}{dx^3} - 4\mathrm{P}\frac{du}{dx} - 2\frac{d\mathrm{P}}{dx}u = 0.$$

En général, pour opérer l'élimination de u', u'', etc., on tirera la valeur de u' de l'équation (a) pour la reporter dans l'équation (b): celle-ci fournira ensuite celle de u'' que l'on rapportera dans l'équation (c); et ainsi de suite. Ce mode d'élimination n'introduit jamais de dénominateurs. Il est aisé de voir que dans l'équation finale en u le coefficient de $\frac{d^{\mu+1}u}{dx^{\mu+1}}$ sera égal à l'unité; les autres coefficients seront des fonctions rationnelles et entières de x, si P est, comme on le suppose, un polynome entier (*).

5. Si l'équation (1) a une intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, il faut que la valeur de y dont cette intégrale se compose soit purement algébrique, ou bien qu'elle contienne au contraire des transcendantes exponentielles et logarithmiques. Telle est l'alternative qui se présente *à priori*. Mais les équations (a), (b),

---

(*) Désignons à présent, par Y_1, Y_2,.... Y_μ, μ intégrales particulières de l'équation (1), et posons $U = Y_1 Y_2 \ldots Y_\mu$; U satisfera aussi à une équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu + 1)$, et cette équation sera identique avec celle dont nous venons de nous occuper. C'est ce qui résulte de la nature même des intégrales de l'équation (1) et ce qu'il nous suffira de vérifier dans le cas particulier où $\mu = 2$. On a alors $U = Y_1 Y_2$, ce qui donne $\frac{dU}{dx} = Y_1 \frac{dY_2}{dx} + Y_2 \frac{dY_1}{dx}$; différenciant de nouveau et remplaçant d^2Y_1, d^2Y_2 par leurs valeurs $PY_1 dx^2$. $PY_2 dx^2$, il vient $\frac{d^2U}{dx^2} = 2PU + 2\frac{dY_1}{dx} \cdot \frac{dY_2}{dx}$. Enfin une troisième différenciation donne

$$\frac{d^3U}{dx^3} - 4P\frac{dU}{dx} - 2\frac{dP}{dx}U = 0,$$

équation toute semblable à celle que l'on a obtenue n° 4.

On prouve, dans les numéros suivants, que l'équation de l'ordre $(\mu + 1)$ dont u dépend n'a pas d'intégrale algébrique et rationnelle. De là et de ce que nous venons de dire il suit que le produit U ne peut pas non plus se réduire à une fonction algébrique et rationnelle. Ainsi en particulier la quantité $y_1^2 y_2^2$ n'est jamais une fonction algébrique et rationnelle de x.

Au reste, ces détails ont peu d'importance dans la question qui nous occupe. Nous ajouterons seulement que l'intégrale complète de l'équation en u ou U de l'ordre $\mu + 1$ est

$$u = A_1 y_1^\mu + A_2 y_1^{\mu-1} y_2 + \ldots + A_{\mu+1} y_2^\mu;$$

y_1 et y_2 désignent deux intégrales distinctes de l'équation (1); A_1. A_2, ... $A_{\mu+1}$ sont des constantes arbitraires. Le lecteur se rendra aisément compte de ce théorème dont nous ne ferons aucun usage dans tout ce qui va suivre.

$(c), \ldots$ nous permettent de prouver que l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique quand on met de côté, bien entendu, l'intégrale insignifiante $y = 0$ dont on doit toujours faire abstraction.

En effet, si l'on satisfait à l'équation (1) en prenant pour y une fonction algébrique de x, cette valeur algébrique de x pourra être regardée comme la racine d'une équation *irréductible* de la forme

$$y^m - Ly^{m-1} - \ldots - My - N = 0,$$

que nous représenterons pour abréger par $f = 0$, et dans laquelle $L, \ldots M$, N désignent des fonctions rationnelles de x. En différenciant deux fois, on aura

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Pour qu'une des racines y_1 de $f = 0$ satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit que l'équation

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

soit satisfaite lorsqu'on y pose $y = y_1$ après avoir remplacé $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur

$$-\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dy}\right)}$$

et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par Py. Mais après ces substitutions, l'équation dont nous parlons devient algébrique, et son premier membre est rationnel en x et y. Dès lors elle ne peut avoir la racine y_1 sans avoir aussi les autres racines y_2, $y_3, \ldots y_m$ de l'équation irréductible $f = 0$. Donc, si la racine y_1 est une intégrale particulière de l'équation (1), il en sera de même des autres racines $y_2, y_3, \ldots y_m$.

Cela étant, faisons

$$u = y_1^\mu + y_2^\mu + \ldots + y_m^\mu,$$

μ étant un nombre entier positif : la valeur de u étant rationnelle et symétrique en $y_1, y_2, \ldots y_m$, s'exprimera rationnellement en fonction des coefficients L, M.....N, et sera par suite rationnelle en x. Pour certaines valeurs particulières de μ, il pourra arriver que l'on ait $u = 0$. Mais si l'on donne à μ successivement les m valeurs suivantes $\mu = 1$, $\mu = 2, \ldots \mu = m$, une au moins des m valeurs correspondantes de u sera rationnelle sans être nulle : autrement il faudrait que les coefficients L,....M, N fussent tous nuls, ce qui est absurde. Or, quel que soit l'exposant μ, je vais prouver que la valeur de u, supposée différente de zéro, ne peut jamais être rationnelle. Cela fait, il sera prouvé que l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique.

6. La démonstration qu'il s'agit d'exposer prend deux formes distinctes suivant que μ est pair ou impair. Pour fixer les idées, je considérerai donc successivement le cas où l'on a $\mu = 4$ et celui où l'on a $\mu = 5$. On verra de suite que les mêmes raisonnements s'appliquent à tous les cas possibles. Mais il faut rappeler d'abord que la valeur de u satisfait à une équation différentielle linéaire de l'ordre $(\mu + 1)$ que nous avons enseigné à former (n° 4). Le coefficient de $\frac{d^{\mu+1}u}{dx^{\mu+1}}$ dans cette équation est toujours égal à l'unité, et les autres coefficients sont des fonctions entières de x. D'après la méthode que j'ai donnée dans mon second Mémoire *sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*) pour trouver les intégrales rationnelles des équations linéaires d'ordre quelconque, on voit déjà que la fonction u réduite à sa plus simple expression n'a pas de dénominateur qui soit dépendant de x. A la seule inspection des équations (a), (b), (c),... on comprend qu'il en est de même des quantités u', u'', etc. Ainsi les valeurs de u, u', etc. ne peuvent être rationnelles sans se réduire à des polynomes entiers (**).

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXII^e cahier.

(**) La décomposition connue des fractions rationnelles en fractions simples suffit aussi pour montrer que u, u', etc., doivent se réduire à des polynomes entiers. En effet il résulte de cette décomposition et des équations (a), (b), (c),.... que si un facteur linéaire $x - x_1$ entrait en dénominateur, dans la valeur de u réduite

7. Si l'on suppose $\mu = 4$, on aura les cinq équations suivantes :

$$(g)\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = u', \\ \dfrac{du'}{dx} = 4\mathrm{P}u + u'', \\ \dfrac{du''}{dx} = 6\mathrm{P}u' + u''', \\ \dfrac{du'''}{dx} = 6\mathrm{P}u'' + u^{\text{iv}}, \\ \dfrac{du^{\text{iv}}}{dx} = 4\mathrm{P}u'''. \end{cases}$$

Le premier terme du polynome P ordonné par rapport à x est ax^{ϵ}. Représentons par $\mathrm{A}x^{\alpha}$ le premier terme de u, en sorte que l'on ait

$$u = \mathrm{A}x^{\alpha} + \mathrm{B}x^{\alpha-1} + \text{etc.}$$

La première des équations (g) nous donnera

$$u' = \alpha\mathrm{A}x^{\alpha-1} + \text{etc.}$$

La seconde nous donnera ensuite

$$u'' = -\,4\mathrm{A}ax^{\alpha+\epsilon} + \text{etc.}$$

On aura de même

$$u''' = -\,2\mathrm{A}a(5\alpha + 2\epsilon)\,x^{\alpha+\epsilon-1} + \text{etc.}$$
$$u^{\text{iv}} = 24\mathrm{A}a^{2}x^{\alpha+2\epsilon} + \text{etc.}$$

Or ces dernières valeurs ne peuvent s'accorder avec l'équation

$$\frac{du^{\text{iv}}}{dx} = 4\mathrm{P}u''';$$

pour cela, en effet, il faudrait que l'on eût

$$24\mathrm{A}a^{2}(\alpha + 2\epsilon) = -\,8\mathrm{A}a^{2}(5\alpha + 2\epsilon),$$

à sa plus simple expression, avec l'exposant γ, il entrerait dans les dénominateurs de $u', \ldots u^{(\mu-1)}, u^{(\mu)}, \frac{du^{(\mu)}}{dx}$, avec les exposants respectifs $\gamma+1, \ldots \gamma+\mu-1$, $\gamma+\mu$, $\gamma+\mu+1$, ce qui ne peut pas être puisqu'on a $\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu\mathrm{P}u^{(\mu-1)}$.

c'est-à-dire

$$\alpha + \varepsilon = 0,$$

ce qui est absurde, puisque l'exposant α est nul ou positif et l'exposant $\varepsilon > 0$. Donc la valeur de u qui répond à $\mu = 4$ ne peut être rationnelle sans se réduire à zéro. Une démonstration semblable s'applique à tous les cas où μ est pair. C'est uniquement pour abréger que nous avons posé en particulier $\mu = 4$.

8. Si l'on suppose $\mu = 5$, on aura les six équations suivantes :

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= u',\\
\frac{du'}{dx} &= 5\mathrm{P}u + u'',\\
\frac{du''}{dx} &= 8\mathrm{P}u' + u''',\\
\frac{du'''}{dx} &= 9\mathrm{P}u'' + u^{\mathrm{iv}},\\
\frac{du^{\mathrm{iv}}}{dx} &= 8\mathrm{P}u''' + u^{\mathrm{v}},\\
\frac{du^{\mathrm{v}}}{dx} &= 5\mathrm{P}u^{\mathrm{iv}},
\end{aligned}\right.$$

Représentons encore par $\mathrm{A}x^{\alpha}$ le premier terme de la fonction u supposée entière. A l'aide des cinq premières équations (h), on démontrera que les fonctions u', u'', u''', u^{iv}, u^{v} sont respectivement de degré $\alpha - 1$, $\alpha + \varepsilon$, $\alpha + \varepsilon - 1$, $\alpha + 2\varepsilon$, $\alpha + 2\varepsilon - 1$; le degré de u^{iv} surpasse ainsi d'une unité le degré de u^{v}, tandis qu'en vertu de l'équation $\frac{du^{\mathrm{v}}}{dx} = 5\mathrm{P}u^{\mathrm{iv}}$, il devrait au contraire lui être inférieur de $\varepsilon + 1$ unités. La même démonstration est applicable toutes les fois que μ est un nombre impair. Ainsi l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique. C'est au reste ce que l'on aurait pu voir d'une manière très simple en essayant de représenter y par une série ordonnée suivant les puissances descendantes de x. Mais bien que l'emploi des séries puisse être ici rendu rigoureux, nous avons cru devoir préférer la méthode précédente.

9. Maintenant, occupons-nous des intégrales qui peuvent s'exprimer sous forme finie, en joignant aux signes algébriques les signes expo-

nentiels et logarithmiques, et si l'équation (1) possède plusieurs intégrales de ce genre, considérons spécialement celle dont l'espèce est marquée par le plus petit indice. En désignant par n cet indice, il faudra que l'intégrale en question contienne au moins une transcendante monome de $n^{ième}$ espèce. Je dis que si l'on réduit à son *minimum* le nombre de ces transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce, aucune d'elles ne sera de la forme $\log v$.

En effet si l'on pose $\log v = \theta$ et si l'on représente par $y = F(x, \theta)$ l'intégrale dont nous parlons, la fonction $F(x, \theta)$ sera algébrique par rapport à θ et pourra contenir en outre d'autres transcendantes dont il est inutile de faire mention. En différenciant deux fois la valeur de y, on obtiendra un résultat de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \theta),$$

F_1 désignant une fonction du même genre que F : pour que l'équation (1) soit satisfaite, il faudra donc que l'on ait

$$F_1(x, \theta) = PF(x, \theta),$$

équation algébrique entre x, θ et toutes les transcendantes de $n^{ième}$ espèce dont $F(x, \theta)$ dépend, et qui par conséquent doit subsister si l'on remplace θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante quelconque (*). On a donc

$$F_1(x, \mu + \theta) = PF(x, \mu + \theta).$$

Mais si l'on avait pris

$$y = F(x, \mu + \theta),$$

on aurait trouvé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \mu + \theta) = Py;$$

c'est là un fait dont on peut s'assurer en exécutant le calcul, et qui tient à la nature logarithmique de la fonction θ, car il cesserait d'avoir lieu si θ était par exemple une exponentielle.

L'intégrale $F(x, \theta)$ nous en fait ainsi découvrir une infinité d'autres

(*) *Voyez* tome II de ce Journal, page 74.

comprises sous la forme $F(x, \mu+\theta)$ où μ est une constante arbitraire; et comme en différenciant l'équation (1) par rapport à μ, on a

$$\frac{d^2\left(\frac{dy}{d\mu}\right)}{dx^2} = P\frac{dy}{d\mu},$$

il s'ensuit que les dérivées de $F(x, \mu+\theta)$ par rapport à μ satisfont aussi à cette équation (1). En posant $\mu = 0$ après la différenciation, on obtient de la sorte les deux intégrales suivantes $F'_\theta(x, \theta)$, $F''_\theta(x, \theta)$ dont la considération nous sera très utile.

La dérivée $F'_\theta(x, \theta)$ ne peut pas être nulle, x restant indéterminée; car si l'on avait en général,

$$F'_\theta(x, \theta) = 0,$$

cette équation étant algébrique par rapport à θ devrait subsister en remplaçant θ par une lettre indéterminée i. Il viendrait ainsi $F'_i(x, i) = 0$, d'où $F(x, i) = F(x, i_0)$, i_0 étant une valeur particulière quelconque de i; par conséquent la fonction $F(x, \theta)$ serait égale à $F(x, i_0)$ et ne contiendrait pas θ contrairement à notre hypothèse.

Le rapport des deux intégrales $F(x, \theta)$, $F'_\theta(x, \theta)$ ne peut pas être une simple constante A, car si l'on avait

$$F'_\theta(x, \theta) = AF(x, \theta),$$

on pourrait dans cette équation, qui est algébrique par rapport à θ et par rapport aux transcendantes de $n^{ième}$ espèce, remplacer θ par une indéterminée i. On trouverait par là

$$F'_i(x, i) = AF(x, i),$$

et dès-lors en intégrant et désignant par i_0 une valeur particulière de la variable i, on obtiendrait

$$F(x, i) = F(x, i_0) \cdot e^{A(i-i_0)},$$

ce qui est absurde, puisque $F(x, i)$ est une fonction algébrique de i.

Les deux intégrales $F(x, \theta)$, $F'_\theta(x, \theta)$ n'ayant pas entre elles un rapport constant, la troisième intégrale $F''_\theta(x, \theta)$ doit nécessairement être de la forme

$$F''_\theta(x, \theta) = AF'_\theta(x, \theta) + BF(x, \theta),$$

A et B étant des constantes. Dans cette équation on peut remplacer θ par une variable indépendante i; elle est alors linéaire et à coefficients constants par rapport à l'inconnue F considérée comme fonction de i, et l'on en déduit

$$F(x, i) = \alpha e^{m_1 i} + \beta e^{m_2 i},$$

m_1, m_2 désignant les deux racines de l'équation $m^2 = Am + B$, et α, β étant deux quantités indépendantes de i, que l'on déterminerait, si l'on voulait, en attribuant à i deux valeurs particulières quelconques. Toutefois si l'on avait $m_2 = m_1$, la formule précédente se modifierait et deviendrait

$$F(x, i) = (\alpha + i\beta) e^{m_1 i},$$

et enfin on aurait

$$F(x, i) = \alpha + i\beta,$$

si les racines m_1, m_2, étaient à la fois égales entre elles et égales à zéro. Quelle que soit celle de ces trois formes que l'on adopte, on arrive à une absurdité. Les deux premières sont d'abord inadmissibles d'après un théorème que j'ai démontré à la page 69 du tome II de ce Journal; la dernière donnant

$$F(x, \theta) = \alpha + \beta\theta,$$

exigerait que l'équation (1) eût l'intégrale $F'_\theta(x, \theta) = \beta$, et cette intégrale dans laquelle θ n'entre plus, contiendrait une transcendante de moins que l'intégrale $F(x, \theta)$, ce qui est impossible.

De cette discussion complète, il résulte que nous ne devons dans la valeur de y la plus simple admettre aucune transcendante de $n^{\text{ième}}$ espèce de la forme $\log v$.

10. Les transcendantes de $n^{\text{ième}}$ espèce contenues dans y devant être, comme on le voit, de la forme $\theta = e^v$, représentons par

$$y = F(x, \theta)$$

la valeur de y où l'on a mis en évidence une seule de ces transcendantes. En différentiant deux fois cette expression, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \theta),$$

F_1 désignant une fonction de même nature que la fonction F, et pour que l'équation (1) soit satisfaite, il viendra

$$F_1(x, \theta) = PF(x, \theta),$$

équation algébrique par rapport à x, θ, et par rapport aux diverses transcendantes contenues algébriquement dans F, en sorte que l'on pourra y remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante arbitraire. On a ainsi

$$F_1(x, \mu\theta) = PF(x, \mu\theta).$$

Mais si l'on avait posé

$$y = F(x, \mu\theta),$$

on aurait trouvé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, \mu\theta) = Py,$$

comme il est aisé de s'en assurer en effectuant les différentiations, et en se rappelant que $\frac{d\theta}{dx} = \theta\frac{du}{dx}$. Donc l'existence de l'intégrale $F(x, \theta)$ entraîne celle de l'intégrale $F(x, \mu\theta)$ et par suite celle des deux intégrales $\theta F'_\theta(x, \theta)$, $\theta^2 F''_\theta(x, \theta)$, que l'on obtient en différentiant $F(x, \mu\theta)$ par rapport à μ et faisant ensuite $\mu = 1$.

On ne peut pas avoir $F'_\theta(x, \theta) = 0$, tant que x reste indéterminée, car à cause de la forme de la fonction F qui est algébrique par rapport à θ, on pourrait dans cette équation traiter θ comme une variable indépendante, et il en résulterait que θ n'entre pas dans la fonction $F(x, \theta)$, ce qui est absurde.

Si le rapport des deux intégrales $\theta F'_\theta(x, \theta)$, $F(x, \theta)$ est une constante m, on aura

$$\theta F'_\theta(x, \theta) = mF(x, \theta),$$

et par suite

$$iF'_i(x, i) = mF(x, i).$$

En intégrant cette équation différentielle, et désignant par i_0 une valeur particulière de la variable indépendante i, on a donc

$$F(x, i) = F(x, i_0) \cdot \frac{i^m}{i_0^m},$$

et par conséquent

$$F(x, \theta) = \alpha\theta^m,$$

α étant une fonction de x contenant une transcendante de moins que $F(x, \theta)$, savoir la transcendante θ.

On satisfera encore à l'équation (1) par une intégrale de la forme $\alpha\theta^m$ quand même le rapport des deux intégrales $\theta F'_\theta(x, \theta)$, $F(x, \theta)$ ne serait pas constant. Alors en effet il faudra que l'on ait

$$\theta^2 F''_\theta(x, \theta) = A\theta F'_\theta(x, \theta) + BF(x, \theta),$$

A et B étant des constantes. En remplaçant θ par une indéterminée i, on aura ensuite

$$i^2 F''_i(x, i) = AiF'_i(x, i) + BF(x, i),$$

équation différentielle du second ordre dont l'intégrale est de la forme

$$F(x, i) = \alpha i^m + \beta i^{m_1}:$$

m et m_1 sont les deux racines de l'équation

$$m(m - 1) = Am + B;$$

α et β sont deux quantités indépendantes de i, mais fonctions de x; elles contiennent une transcendante de moins que $F(x, \theta)$, savoir la transcendante θ; on en déterminerait si on voulait les valeurs en donnant à i deux valeurs particulières quelconques i_0, i_1, puis résolvant les deux équations du premier degré

$$F(x, i_0) = \alpha i_0^m + \beta i_0^{m_1},$$
$$F(x, i_1) = \alpha i_1^m + \beta i_1^{m_1}.$$

En faisant $i = \theta$, on a maintenant

$$F(x, \theta) = \alpha\theta^m + \beta\theta^{m_1}.$$

Or, l'existence de cette intégrale entraîne celle de l'intégrale nouvelle

$$F(x, \mu\theta) = \alpha\mu^m\theta^m + \beta\mu^{m_1}\theta^{m_1},$$

où μ est une constante arbitraire, et la combinaison des deux précédentes en produit une troisième

$$\frac{F(x, \mu\theta) - \mu^{m_\prime} F(x, \theta)}{\mu^m - \mu^{m_\prime}} = \alpha\theta^m,$$

qui a la forme indiquée plus haut. On n'a pas d'ailleurs à craindre que la fonction α se réduise à zéro; car si cela était, on aurait

$$F(x, \theta) = \beta\theta^{m_\prime},$$

et par suite le rapport de $\theta F'_\theta(x, \theta)$ à $F(x, \theta)$ serait une constante $m_\prime$ contrairement à l'hypothèse adoptée plus haut.

Si les deux racines m, $m_\prime$ étaient égales entre elles, l'intégrale de l'équation

$$i^2 F''_i(x, i) = AiF'_i(x, i) + BF(x, i)$$

changerait de forme et deviendrait

$$F(x, i) = \alpha i^m + \beta i^m \log i,$$

les coefficients α et β étant comme ci-dessus indépendants de i. Mais comme la fonction $F(x, i)$ est algébrique en i, il faudra que $\log i$ disparaisse du second membre et que l'on ait $\beta = 0$. En effet, si β n'est pas zéro et que l'exposant m soit rationnel, on tire de l'équation précédente

$$\log i = \frac{F(x, i) - \alpha i^m}{\beta i^m},$$

c'est-à-dire $\log i =$ *une fonction algébrique de* i, ce qui ne se peut. Et si m est irrationnel ou imaginaire, on en tire

$$i^m = \frac{F(x, i)}{\alpha + \beta \log i},$$

c'est-à-dire $i^m =$ *une fonction transcendante de première espèce*, ce qui n'est pas possible non plus puisque dans ce cas i^m est toujours une fonction transcendante de seconde espèce (*). Il est donc nécessaire

(*) *Voyez* tome II de ce Journal, page 94.

que β soit nul, et alors il reste simplement $F(x, i) = \alpha i^m$, d'où $F(x, \theta) = \alpha\theta^m$.

11. Cette discussion approfondie nous montre que si l'on peut satisfaire à l'équation (1) en prenant pour y une fonction transcendante de $n^{\text{ième}}$ espèce où le nombre des transcendantes monomes de $n^{\text{ième}}$ espèce est supposé réduit à son *minimum*, toutes ces transcendantes seront de la forme e^v; de plus si l'on désigne l'une d'elles par θ, on pourra toujours supposer l'intégrale mise sous la forme $\alpha\theta^m$, m étant une constante et α ne contenant plus θ. Si l'on désigne par $\theta_1 = e^{v_1}$, $\theta_2 = e^{v_2}$, etc., les autres transcendantes de $n^{\text{ième}}$ espèce, on pourra de même les mettre ainsi en facteurs dans l'expression de y qui deviendra par suite

$$y = \sigma\theta^m\theta_1^{m_1}\theta_2^{m_2}, \ldots = \sigma e^{mv + m_1 v_1 + \text{etc.}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y = \sigma e^{\omega},$$

σ et ω désignant des fonctions de $(n-1)^{\text{ième}}$ espèce seulement.

Actuellement posons

$$y = e^{\int t dx},$$

d'où

$$t = \frac{dy}{y dx} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dx} + \sigma\frac{d\omega}{dx}\right):$$

t satisfera à l'équation

$$(\alpha) \qquad \frac{dt}{dx} + t^2 = P,$$

et sera, comme les deux fonctions σ et ω, de $(n-1)^{\text{ième}}$ espèce tout au plus, en sorte que si l'on suppose t de $m^{\text{ième}}$ espèce, on aura $m < n$.

J'ajoute même que t se réduira à une simple fonction algébrique. Cette proposition sera démontrée si l'on fait voir qu'en supposant $m > 0$, la valeur de t conduit à une intégrale de l'équation (1) exprimée par une fonction transcendante de $m^{\text{ième}}$ espèce, ce qui est absurde, (m étant $< n$) puisque l'indice n a été pris le plus petit possible.

Admettons en effet que t soit une fonction transcendante de $m^{\text{ième}}$ espèce, m étant > 0, et réduisons à son *minimum* le nombre total des transcendantes monomes de $m^{\text{ième}}$ espèce qui s'y trouvent contenues, puis supposons que l'une d'elles soit de la forme e^v, v désignant une fonction de $(m-1)^{ième}$ espèce. Pour mettre θ en évidence, posons

$$t = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes de $m^{ième}$ espèce qui s'y trouvent sous-entendues. En différenciant, on a

$$\frac{dt}{dx} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta\frac{dv}{dx}:$$

l'équation (α) devient ainsi

$$\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\theta\frac{dv}{dx} + \varphi(x, \theta)^2 = \mathrm{P}.$$

Comme elle est algébrique par rapport aux transcendantes de $m^{ième}$ espèce dont le nombre a été réduit à son *minimum*, on peut y remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une indéterminée : cela donne

$$\varphi'_x(x, \mu\theta) + \varphi'_{\mu\theta}(x, \mu\theta)\mu\theta\frac{dv}{dx} + \varphi(x, \mu\theta)^2 = \mathrm{P}$$

ou

$$d\varphi(x, \mu\theta) + \varphi(x, \mu\theta)^2 dx = \mathrm{P}dx.$$

Il faut en conclure que l'équation (α) serait satisfaite aussi par $t = \varphi(x, \mu\theta)$. En d'autres termes, l'équation (1) aura cette intégrale

$$y = e^{\int\varphi(x, \mu\theta)dx}$$

dans laquelle μ est une constante arbitraire. Comme en différenciant par rapport à μ, on a d'ailleurs

$$\frac{d^2\left(\frac{dy}{d\mu}\right)}{dx^2} = \mathrm{P}\frac{dy}{d\mu},$$

il s'ensuit qu'on obtient encore une nouvelle intégrale en différenciant la précédente par rapport à μ et posant si l'on veut $\mu = 1$ après la différenciation. Nous vérifierons donc l'équation (1), soit en prenant

$$y = e^{\int\varphi(x, \theta)dx} = y_1,$$

soit en prenant

$$y = e^{\int\varphi(x,\,\theta)\,dx}\int\theta\varphi'_\theta(x,\,\theta)\,dx = y_2.$$

A cause de la relation qui existe toujours entre deux intégrales y_1, y_2, nous pourrons donc écrire

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = y_1^2.\theta\varphi'_\theta(x,\,\theta) = \mathrm{C},$$

C étant une constante.

Quand la constante C n'est pas nulle, il vient

$$y_1 = \frac{\sqrt{\mathrm{C}}}{\sqrt{\theta\varphi'_\theta(x,\,\theta)}},$$

c'est-à-dire $y_1 =$ une fonction transcendante de $m^{ième}$ espèce, comme nous l'avions annoncé. Si au contraire la constante C se réduit à zéro, c'est-à-dire si la fonction $\varphi'_\theta(x,\,\theta)$ est égale à zéro, cette conclusion n'est plus permise. Mais alors dans l'équation $\varphi'_\theta(x,\,\theta) = 0$, on peut traiter θ comme une variable indépendante; d'où il suit, comme on l'a déjà expliqué plusieurs fois, que $\varphi(x,\,\theta)$ ne contient pas θ. Pour que notre démonstration soit en défaut, il faut donc que t ne renferme aucune exponentielle de $m^{ième}$ espèce.

La fonction t étant de $m^{ième}$ espèce, elle doit nécessairement dans ce cas renfermer au moins un logarithme de $m^{ième}$ espèce. Soit $\theta = \log v$ ce logarithme que nous mettrons en évidence en posant $t = \varphi(x,\,\theta)$. Puisque la fonction t contient nécessairement θ, nous ne pourrons pas avoir cette fois $\varphi'_\theta(x,\,\theta) = 0$. En différenciant la valeur de t, on trouve

$$\frac{dt}{dx} = \varphi'_x(x,\theta) + \varphi'_\theta(x,\,\theta)\frac{dv}{vdx}:$$

l'équation (α) donne par suite

$$\varphi'_x(x,\,\theta) + \varphi'_\theta(x,\,\theta)\frac{dv}{vdx} + \varphi(x,\,\theta)^2 = \mathrm{P},$$

équation où l'on a le droit de remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire. Or l'équation nouvelle que l'on obtient ainsi prend aisément cette forme

$$d\varphi(x,\ \mu+\theta) + \varphi(x,\ \mu+\theta)^2 dx = \mathrm{P}dx\,,$$

et elle nous montre que l'équation (2) serait encore satisfaite en prenant $t = \varphi(x,\ \mu+\theta)$. De là résulte pour l'équation (1) cette intégrale

$$e^{\int \varphi(x,\ \mu+\theta)\,dx}$$

qui, différenciée par rapport à μ, donne naissance à une autre intégrale de cette même équation (1), savoir

$$e^{\int \varphi(x,\ \mu+\theta)dx}\int \varphi'_\theta(x,\ \mu+\theta)\,dx,$$

ou plus simplement,

$$e^{\int \varphi(x,\ \theta)dx}\int \varphi'_\theta(x,\ \theta)\,dx,$$

en faisant $\mu = 0$ après la différenciation. Ainsi l'équation (1) est satisfaite à la fois par l'intégrale

$$y = e^{\int \varphi(x,\ \theta)dx} = y_1$$

et par l'intégrale

$$y = e^{\int \varphi(x,\ \theta)dx}\int \varphi'_\theta(x,\ \theta)\,dx = y_2,$$

entre lesquelles on doit avoir une relation de la forme

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = \mathrm{C}.$$

Mais en mettant pour y_1 et y_2 leurs valeurs, cette relation fournit

$$y_1^2\varphi'_\theta(x,\ \theta) = \mathrm{C}.$$

Comme la dérivée $\varphi'_\theta(x,\ \theta)$ n'est pas nulle, la constante C ne le sera pas non plus. On aura donc

$$y_1 = \frac{\sqrt{\mathrm{C}}}{\sqrt{\varphi'_\theta(x,\ \theta)}}.$$

Par suite l'équation (1) sera satisfaite en posant

$$y = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\varphi_\theta'(x, \theta)}},$$

c'est-à-dire $y =$ *une fonction transcendante de* m$^{\text{ième}}$ *espèce*, ce qu'il fallait démontrer.

12. Par ce qui précède, il est prouvé que s'il existe une intégrale de l'équation (1) exprimée par une fonction finie explicite de x, on pourra toujours satisfaire à cette même équation par une valeur de la forme

$$y = e^{\int t dx},$$

t étant une fonction algébrique telle que l'on ait

$$(\alpha) \qquad \frac{dt}{dx} + t^2 = \mathrm{P}.$$

Désignons par

$$(\beta) \qquad \varpi(x, t) = 0$$

l'équation algébrique *irréductible* et à coefficients rationnels dont t dépend. En la différenciant elle nous donnera

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\varpi_x'(x, t)}{\varpi_t'(x, t)},$$

$\varpi_x'(x, t)$, $\varpi_t'(x, t)$ représentant les dérivées de $\varpi(x, t)$ par rapport à x et par rapport à t. En substituant cette valeur dans (α), on aura donc

$$(\gamma) \qquad \varpi_x'(x, t) + (\mathrm{P} - t^2)\varpi_t'(x, t) = 0.$$

Les équations (β) et (γ) doivent donc avoir une racine commune ; et comme la première est irréductible, il suit de là, par un théorème connu, que toutes ses racines t_1, t_2, etc. appartiendront à la seconde. En d'autres termes l'équation (1) sera satisfaite par toutes les intégrales particulières

$$y_1 = e^{\int t_1 dx}, \quad y_2 = e^{\int t_2 dx}, \quad \text{etc.}$$

dont le nombre est égal au degré de l'équation (β).

On prouve aisément que ce nombre ne peut pas surpasser 2. En effet deux intégrales y_1, y_2, de l'équation (1) sont toujours liées par une relation de la forme

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C_1,$$

et cette relation devient ici

$$e^{\int (t_1 + t_2) dx} (t_2 - t_1) = C_1,$$

ou

$$y_1 y_2 = \frac{C_1}{t_2 - t_1}.$$

Si la constante C_1 était nulle, on aurait $t_2 = t_1$, et l'équation (β) possédant des racines égales, ne serait plus irréductible : C_1 est donc une quantité essentiellement différente de zéro.

L'existence d'une troisième intégrale

$$y_3 = e^{\int t_3 dx}$$

entraînera de même les deux équations

$$y_2 y_3 = \frac{C_2}{t_3 - t_2}, \quad y_3 y_1 = \frac{C_3}{t_1 - t_3},$$

qui divisées membre à membre donnent

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{C_2 (t_1 - t_3)}{C_3 (t_3 - t_2)}.$$

Le quotient et le produit des quantités y_1, y_2 étant algébriques, on voit que ces deux intégrales le seront aussi. Or cela est absurde, puisque l'équation (1) n'a pas d'intégrale algébrique.

13. L'équation (β) est donc ou du premier ou du second degré. Mais cette seconde hypothèse doit elle-même être rejetée, en sorte que t ne peut être qu'une fonction rationnelle de x. C'est ce que je vais démontrer (*).

(*) La démonstration donnée dans le texte est très simple, mais assez longue : on arrive plus vite au but en s'appuyant sur la note du nº 4, d'après laquelle $y_1 y_2$ ne peut jamais être une fonction rationnelle de x. En effet si l'équation (β) était du

Si l'équation (β) était du second degré la valeur de t serait de la forme

$$t = \mathrm{U} + \sqrt{\mathrm{V}},$$

U et V étant des fonctions rationnelles de x, et l'on en tirerait

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{\sqrt{\mathrm{V}}}{2\mathrm{V}} \cdot \frac{d\mathrm{V}}{dx}.$$

L'équation (α) deviendrait donc

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \mathrm{U}^2 + \mathrm{V} - \mathrm{P} + \sqrt{\mathrm{V}}\left(\frac{1}{2\mathrm{V}} \cdot \frac{d\mathrm{V}}{dx} + 2\mathrm{U}\right) = 0,$$

de sorte qu'à cause du radical $\sqrt{\mathrm{V}}$, on devrait poser séparément

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \mathrm{U}^2 + \mathrm{V} - \mathrm{P} = 0,$$
$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} + 4\mathrm{UV} = 0.$$

Toute fonction rationnelle V peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{V} = \mathrm{H}(x-p)^{\alpha}(x-q)_{\beta}\ldots(x-r)^{\gamma},$$

H, p, q, ... r étant des constantes, et α, β, ... γ des exposants entiers positifs, nuls ou négatifs. Mais je dis qu'ici ces exposants ne peuvent pas être positifs.

---

second degré, ses deux racines t_1, t_2 seraient de la forme $\mathrm{U}+\sqrt{\mathrm{V}}$, $\mathrm{U}-\sqrt{\mathrm{V}}$: d'après ce qu'on a vu n° 12, il en résulterait $y_1 y_2 = \frac{\mathrm{C}_1}{t_2 - t_1} = -\frac{\mathrm{C}_1}{2\sqrt{\mathrm{V}}}$ et par conséquent $y_1^2 y_2^2 = \frac{\mathrm{C}_1^2}{4\mathrm{V}}$ = une fonction rationnelle de x, ce qui est absurde.

On substituera, si l'on veut, cette méthode à celle du n° 13. Il faut même observer qu'à l'aide des principes de la note du n° 4, on peut démontrer tout d'un coup que le degré i de l'équation (β) ne surpasse jamais l'unité. En effet si i était >1, on aurait $\frac{i(i-1)}{2}$ équations semblables à celle-ci $y_1^2 y_2^2 = \frac{\mathrm{C}_1^2}{(t_2-t_1)^2}$. Multipliant entre elles toutes ces équations, on voit que le premier membre de l'équation résultante est le produit d'un certain nombre d'intégrales de l'équation (1), et que le second est rationnel, puisqu'il se forme en divisant une constante par le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (β): or ce résultat est absurde, d'après ce qu'on a dit dans la note citée.

On a

$$V = P - \frac{dU}{dx} - U^2,$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dP}{dx} - \frac{d^2U}{dx^2} - 2U\frac{dU}{dx}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dV}{dx} + 4UV = 0,$$

il vient

$$(\delta) \qquad \frac{d^2U}{dx^2} + 6U\frac{dU}{dx} + 4U^3 - \frac{dP}{dx} - 4PU = 0.$$

Mais, à cause de la valeur de V écrite ci-dessus, l'équation

$$\frac{dV}{dx} + 4UV = 0 \quad \text{ou} \quad U = -\frac{1}{4V}\cdot\frac{dV}{dx}$$

donne

$$U = -\frac{\alpha}{4(x-p)} - \frac{\beta}{4(x-q)} - \ldots - \frac{\gamma}{4(x-r)},$$

d'où résulte

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\alpha}{4(x-p)^2} + \frac{\beta}{4(x-q)^2} + \ldots + \frac{\gamma}{4(x-r)^2},$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{2\alpha}{4(x-p)^3} - \frac{2\beta}{4(x-q)^3} - \ldots - \frac{2\gamma}{4(x-r)^3}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (δ), on voit que celle-ci contiendra un terme divisé par $(x-p)^3$. En mettant ce terme en évidence, il sera aisé de donner à l'équation (δ) la forme

$$\frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)}{16(x-p)^3} = \frac{M}{N(x-p)^2},$$

M et N étant deux polynomes entiers dont le second n'est pas divisible par $x-p$. Mais de là on tire

$$\frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)}{x-p} = 16M = \text{une fonction entière.}$$

Donc pour qu'il n'y ait pas absurdité, il faut que l'on ait $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$ ou $\alpha = -4$. Ainsi tous les exposants α, $\beta, \ldots \gamma$ sont nuls ou négatifs.

De là il suit facilement que l'équation (δ) est impossible. En effet, si on la met sous la forme

$$\frac{dP}{dx} + 4PU = \frac{d^2U}{dx^2} + 6U\frac{dU}{dx} + 4U^3,$$

on voit que le second membre est uniquement composé de fractions proprement dites, en sorte que la partie entière contenue dans le premier doit disparaître d'elle-même. Mais pour cela il faudrait que le coefficient de la puissance de x la plus élevée se réduisît à zéro, tandis qu'il est essentiellement différent de zéro. Pour le montrer j'observe que P étant $= ax^{\varepsilon} + bx^{\varepsilon - 1} + \text{etc.}$, on a $\frac{dP}{dx} = \varepsilon a x^{\varepsilon - 1} + \text{etc.}$ De plus en divisant P par les divers facteurs $x - p$, $x - q, \ldots x - r$, qui entrent en dénominateurs dans l'expression de U écrite plus haut, on voit que le terme de 4PU du degré le plus élevé est

$$-a(\alpha + \beta + \ldots + \gamma)x^{\varepsilon - 1}.$$

Le coefficient de $x^{\varepsilon - 1}$ dans $\frac{dP}{dx} + 4PU$ se trouve ainsi égal à

$$a[\varepsilon - (\alpha + \beta + \ldots + \gamma)]:$$

par conséquent il n'est pas nul puisque ε est > 0 et que.... $\alpha + \beta + \ldots + \gamma$ est $= 0$ ou < 0.

Ce résultat absurde nous fait voir que l'équation (β) ne peut pas être du second degré.

14. La valeur de t que l'on cherche est donc rationnelle : elle se compose d'une partie entière Q et d'une partie fractionnaire réductible en une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{G}{(x-p)^{\alpha}},$$

de sorte que l'on peut écrire

$$t = Q + \Sigma \frac{G}{(x-p)^{\alpha}}.$$

De là résulte

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dQ}{dx} - \Sigma \frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}};$$

et il faut qu'en portant ces valeurs dans l'équation (α), celle-ci soit satisfaite. Mais comme son premier membre se composera aussi d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, il sera nécessaire que ces deux parties s'annullent séparément. Or la partie entière de t^2 contient outre Q^2 un terme Q_1 provenant du double produit de Q par la partie fractionnaire de t. On doit donc poser

$$\frac{dQ}{dx} + Q^2 + Q_1 - P = 0,$$

d'où

$$P = Q^2 + \frac{dQ}{dx} + Q_1.$$

Le degré de la fonction Q_1 et par suite de $\frac{dQ}{dx} + Q_1$ est inférieur au moins d'une unité à celui de Q. L'équation que je viens d'écrire exige donc que P et Q^2 soient de même degré et par suite que P soit de degré pair. On a donc ce premier théorème : *Lorsque le degré ε de la fonction* P *est impair, l'équation* (1) *n'a jamais d'intégrale exprimable sous forme finie explicite.*

Supposons maintenant $\varepsilon = 2\nu$; Q^2 étant de degré 2ν, Q sera de degré ν et $\frac{dQ}{dx} + Q_1$ de degré $\nu - 1$ tout au plus. Donc $\frac{dQ}{dx} + Q_1$ est le reste R qu'on obtiendra en extrayant autant que possible la racine carrée de P, tandis qu'au signe près la fonction Q est égale à la partie entière de cette même racine carrée. *La détermination de* Q *est donc facile : elle se réduit à trouver la partie entière de la quantité* $\sqrt{P}$ *ordonnée suivant les puissances descendantes de* x. *La valeur de* Q *pourra d'ailleurs être affectée du signe* + *ou du signe* —.

15. Maintenant occupons-nous de la partie fractionnaire de t. Parmi les fractions simples qui la composent, considérons spéciale-

ment celle qui répond au diviseur $x-p$ et qui est de la forme

$$\frac{G}{(x-p)^{\alpha}};$$

en outre, s'il y en a plusieurs de cette espèce, attachons-nous de préférence à celle où l'exposant α est le plus grand. Dès-lors les valeurs de $\frac{dt}{dx}$ et de t^2 pourront s'écrire ainsi

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}}+\frac{M_1}{N_1(x-p)^{\alpha}},$$
$$t^2=\frac{G^2}{(x-p)^{2\alpha}}+\frac{M_2}{N_2(x-p)^{2\alpha-1}},$$

M_1, M_2, N_1, N_2, étant des polynomes dont les deux derniers ne sont pas divisibles par $x-p$. En les substituant dans (α), on aura

$$\frac{G^2}{(x-p)^{2\alpha}}-\frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}}+\frac{M_2}{N^2(x-p)^{2\alpha-1}}$$
$$+\frac{M_1}{N_1(x-p)^{\alpha}}-P=0.$$

Or si 2α est $>$ ou $<\alpha+1$, cette équation est évidemment absurde. Il faut donc poser $2\alpha=\alpha+1$, c'est-à-dire $\alpha=1$. Pour que les deux premiers termes se détruisent, il faut de plus que $G=1$. Ainsi la quantité

$$\sum\frac{G}{(x-p)^{\alpha}}$$

se réduit à

$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\ldots+\frac{1}{x-r}.$$

16. Il s'ensuit que t peut avoir l'une des deux formes suivantes

$$t=Q+\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\ldots+\frac{1}{x-r},$$

ou

$$t=-Q+\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\ldots+\frac{1}{x-r},$$

suivant que l'on prend Q avec le signe $+$ ou avec le signe $-$. Toute intégrale rationnelle de l'équation (α) rentre dans l'une ou l'autre de ces formes; mais nous verrons tout-à-l'heure qu'elles ne sont jamais possibles toutes deux à la fois.

17. A la première valeur de t répond une valeur de y exprimée par

$$e^{\int t dx} \quad \text{ou} \quad Ye^{\int Q dx},$$

Y étant un polynome entier. On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int Q dx}\left(\frac{dY}{dx} + QY\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int Q dx}\left[\frac{d^2Y}{dx^2} + 2Q\frac{dY}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx} + Q^2\right)Y\right].$$

En vertu de l'équation (1) on doit donc avoir

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + 2Q\frac{dY}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx} + Q^2 - P\right)Y = 0,$$

c'est-à-dire

$$(A) \qquad \frac{d^2Y}{dx^2} + 2Q\frac{dY}{dx} + \left(\frac{dQ}{dx} - R\right)Y = 0,$$

puisque

$$P = Q^2 + R.$$

Telle est l'équation différentielle dont la fonction Y dépend. Il sera par son moyen toujours très facile de trouver cette fonction ou de prouver qu'elle n'existe pas.

Voici, du reste, comment on calcule le degré de la fonction Y. Le premier terme de Q est $x^\nu\sqrt{a}$: soit $a'x^{\nu-1}$ le terme de R où x est élevée à la puissance $\nu - 1$, a' se réduisant à zéro quand ce terme manque dans R; enfin, soit $A_i x^i$ le premier terme de Y. Il est clair que le terme du degré le plus élevé dans le premier membre de l'équation (A) sera

$$A_i(2i\sqrt{a} + \nu\sqrt{a} - a')x^{i+\nu-1}.$$

Pour qu'il disparaisse, il faudra donc qu'on ait

$$i = \frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}.$$

Pour que le polynome Y existe il faut donc que

$$\frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

soit un nombre entier nul ou positif : cette condition étant remplie, on prendra ce nombre pour valeur de i; on fera

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}x^i + \mathrm{A}_{i-1}x^{i-1} + \ldots + \mathrm{A}_0,$$

et l'on cherchera par la méthode des coefficients indéterminés si une valeur de cette forme peut ou non satisfaire à l'équation (A).

Si l'on avait pris Q avec le signe —, on aurait de même trouvé pour y une valeur de la forme

$$y = \mathrm{Z}e^{-\int \mathrm{Q}dx},$$

Z étant un polynome entier déterminé par l'équation

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2\mathrm{Z}}{dx^2} - 2\mathrm{Q}\frac{d\mathrm{Z}}{dx} - \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx} + \mathrm{R}\right)\mathrm{Z} = 0.$$

Le degré du polynome Z aurait été

$$-\frac{a' + \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}.$$

Or on peut observer que la somme des deux quantités

$$\frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}, \quad -\frac{a' + \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

est égale à $-\nu$: quand une de ces deux quantités est nulle ou positive, l'autre est donc nécessairement négative : ainsi les deux polynomes Y et Z ne sont jamais possibles à la fois.

Quand ils n'existent ni l'un ni l'autre, l'équation (1) n'a aucune intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x.

Si au contraire l'un d'eux, Y par exemple, existe, on satisfait à l'équation (1) en posant

$$y = Ye^{\int Qdx} = Ye^{\lambda},$$

où λ désigne l'intégrale de Qdx. Cette valeur de y est une fonction transcendante de première espèce. Mais dans ce cas même l'intégrale complète de l'équation (1), savoir

$$y = AYe^{\lambda} + BYe^{\lambda}\int \frac{e^{-2\lambda}dx}{Y^2},$$

ne peut pas être débarrassée du signe $\int$. En effet, si l'intégrale

$$\int \frac{e^{-2\lambda}dx}{Y^2}$$

était exprimable en fonction finie explicite de x, il suit des théorèmes démontrés dans mon Mémoire sur *l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes* (*) qu'elle aurait une valeur de la forme

$$Xe^{-2\lambda},$$

X étant une fonction rationnelle de x. L'équation (1) aurait donc cette intégrale particulière

$$YXe^{-\lambda} \quad \text{ou} \quad YXe^{-\int Qdx}:$$

par suite l'équation (α) à laquelle on satisfait déjà en prenant

$$t = Q + \frac{dY}{Y\,dx}$$

serait également satisfaite par

$$t = -Q + \frac{d(YX)}{YX\,dx},$$

c'est-à-dire que l'on pourrait attribuer à t l'une et l'autre des deux formes indiquées n° 16. Mais on a vu plus haut que cela est impossible. Donc l'intégrale complète de l'équation (1) n'est jamais exprimable en fonction finie explicite de x, bien que cette équation (1)

(*) Journal de M. Crelle, tome 13, p. 93.

puisse avoir dans certains cas une intégrale Ye^{λ} ou $Ze^{-\lambda}$ réductible à cette forme.

18. Je terminerai ce Mémoire par une observation qui n'est pas sans importance. En cherchant à intégrer l'équation (1), nous avons toujours borné notre analyse aux fonctions qu'on obtient en combinant un nombre limité de fois les signes algébriques exponentiels et logarithmiques; mais cette analyse s'étend d'elle-même au cas où l'on joindrait à ces trois signes le signe $\int$ indiquant une intégrale indéfinie, relative à la variable x, c'est-à-dire une intégrale dont la limite supérieure est x et dont la limite inférieure est une constante déterminée ou arbitraire. En effet, les fonctions qui naissent de l'emploi du signe $\int$ jouissent, dans ce genre de recherches, de propriétés toutes semblables à celles des logarithmes, et peuvent se traiter par les mêmes méthodes.