JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

KUMMER

Sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 390-391.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__390_0>

Sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y$;

Par M. KUMMER.

Dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (tome XIX, page 286), M. Kummer s'est occupé de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = x^m . y,$$

et il a donné le moyen d'en trouver l'intégrale complète (exprimée par des quadratures définies) toutes les fois que m est un nombre entier positif. Nous indiquerons en deux mots la méthode élégante dont il a fait usage.

En différenciant l'équation (1), l'on a

$$(2) \qquad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = x^m . \frac{dy}{dx} + m x^{m-1} . y.$$

Or il est aisé de vérifier que l'équation (2) est satisfaite en posant

$$(3) \qquad y = \int_0^\infty u^{n-1} . e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} . \psi(xu)\, du,$$

la fonction $\psi(x)$ étant définie par l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^{n+1} \psi(x)}{dx^{n+1}} = x^{m-1} . \psi(x).$$

Comme la fonction $\psi(x)$ contient $(n+1)$ constantes arbitraires, la formule (3) fournit l'intégrale complète de l'équation (2); par conséquent elle exprimera aussi l'intégrale complète de l'équation (1), si les $(n+1)$ constantes dont nous venons de parler satisfont à une certaine équation de condition qu'on trouvera aisément dans chaque cas particulier. L'application répétée de ce théorème donne successivement les intégrales de l'équation (1) pour les cas de $m=1$, $m=2$, etc., au moyen de l'intégrale connue relative au cas où $m=0$. Il nous semble que l'artifice dont M. Kummer s'est servi, pourrait être employé avec succès pour la recherche des intégrales de beaucoup d'autres équations.