JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BRIANCHON

Note sur le centre de gravité du tronc de prisme

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 345-347.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__345_0>

NOTE

Sur le centre de gravité du tronc de prisme ;

PAR M. BRIANCHON,

Ancien chef d'escadron d'Artillerie.

---

1. Soient AB, CD, EF les trois arètes parallèles d'un tronc de prisme triangulaire, V le volume du tronc, Z la distance du centre de gravité à la face ABCD; enfin, H la distance de cette face à l'arète opposée EF.

Par l'une, E, des extrémités de EF, je mène deux plans sécants, EBD, EAD, qui décomposent le tronc en trois pyramides triangulaires, ECAD, EABD, EFBD, dont les volumes seront désignés par V', V'', V''', respectivement. Nommons Z', Z'', Z''' les distances respectives des centres de gravité de ces pyramides à la face ABCD, et prenons les moments par rapport à cette face; il vient

$$V.Z = V'.Z' + V''.Z'' + V'''.Z'''.$$

Reste à déterminer V', V'', V''', et Z', Z'', Z'''.

PREMIÈREMENT. Quelle que soit l'inclinaison des bases du tronc sur les trois arètes parallèles, on a

$$V : V' : V'' : V''' :: AB + CD + EF : CD : AB : EF$$

(Voyez la *Géométrie* de Legendre, livre VI, proposition 22).

SECONDEMENT. *La distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à la moyenne distance de ses quatre* sommets *au même plan.*

(Voyez la *Statique* de M. Poinsot, chapitre 3). Donc :

$$Z' = \tfrac{1}{4}H, \qquad Z'' = \tfrac{1}{4}H, \qquad Z''' = \tfrac{1}{4}H.$$

Substituant ces valeurs de V', V'', V''' et Z', Z'', Z''' dans l'équation des moments, il vient

$$Z = \tfrac{1}{4}H\left(1 + \frac{EF}{AB + CD + EF}\right),$$

formule qu'on traduit ainsi :

« Dans un tronc de prisme triangulaire, la distance du centre de » gravité à l'une quelconque des trois faces est égale au produit de » deux facteurs, dont l'un est le quart de la distance de cette face à » l'arète opposée, et dont l'autre est l'unité augmentée du rapport de » cette arète à la somme des trois arètes parallèles. »

2. Combinant ce théorème avec le principe des moments, on obtiendra, pour un tronc de prisme polygonal, la distance du centre de gravité à l'une quelconque des faces. Un tel corps, en effet, représente toujours un système de prismes triangulaires tronqués.

3. Coupez le tronc de prisme triangulaire par un plan parallèle à l'une quelconque, ABCD, des trois faces; la section est un trapèze, *abcd*, ayant son centre de gravité sur la droite qui joint les milieux de ses deux bases *ab*, *cd*; et cette droite de jonction est dans le plan MM qui joint les milieux des trois arètes parallèles AB, CD, EF. Donc :

« Le centre de gravité d'un tronc de prisme triangulaire est sur le » plan qui joint les milieux des trois arètes parallèles. »

Concevez qu'on prolonge les plans des deux bases du tronc, jusqu'à leur rencontre mutuelle dans l'espace; la droite d'intersection est évidemment sur MM. Ainsi :

4. « Dans un tronc de prisme polygonal quelconque, les milieux » des arètes parallèles sont tous situés sur un même plan, et ce plan » contient le centre de gravité du tronc. »

Le même théorème est applicable aux troncs de cylindre à base quelconque.

5. Considérez, dans le tronc de prisme polygonal, deux quel-

conques des arêtes parallèles comme bases d'un trapèze. Les diagonales de ce trapèze auront leur croisement sur MM, et les deux côtés aussi, en les prolongeant.

6. Les deux théorèmes (1, 3) sur le centre de gravité du tronc de prisme triangulaire ont leurs analogues dans la géométrie plane ; effectivement :

« Dans un trapèze, la distance du centre de gravité à l'une quel-
» conque des deux bases, est égale au produit de deux facteurs,
» dont l'un est le tiers de la hauteur, et dont l'autre est l'unité aug-
» mentée du rapport de l'autre base à la somme des deux bases.

» Le centre de gravité du trapèze est sur la droite qui joint les
» milieux des deux bases. »
