JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3.\ldots x$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 317-322.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__317_0>

Note sur l'évaluation approchée du produit $1 . 2 . 3 \ldots x$;

Par J. LIOUVILLE (*).

1. La méthode dont je me servirai ressemble beaucoup à celle employée par M. Lacroix, dans son *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (page 678 de la 5e édition). Cette méthode consiste à chercher le logarithme du produit $1.2.3\ldots x$, et elle repose sur la formule connue de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2x}{2x-1} \cdot \frac{2x}{2x+1} \cdots\cdots$$

en vertu de laquelle la quantité

$$\begin{array}{l} 2\log 2 + 2\log 4 + \ldots\ldots + 2\log(2x-2) + \log(2x) \\ -2\log 1 - 2\log 3 - \ldots\ldots - 2\log(2x-3) - 2\log(2x-1) \end{array}$$

se réduit à $\log \pi - \log 2$ lorsque $x = \infty$. Mais je la compléterai en donnant une limite supérieure de l'erreur commise dans l'évaluation approchée de $\log(1.2.3\ldots x)$.

2. Pour toute valeur positive de z, on a

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-\alpha z}\, d\alpha,$$

d'où il résulte, en intégrant par rapport à z,

$$(1) \qquad \log z = \int_0^\infty \frac{(e^{-\alpha} - e^{-\alpha z})\, d\alpha}{\alpha}.$$

(*) M. Binet a traité la même question par une méthode différente dont il a bien voulu me communiquer, il y a déjà long-temps, les résultats. Un extrait de son Mémoire a été publié dans un des derniers *Comptes rendus*.

Faisant successivement, dans cette formule, $z=1$, $z=2$, ... $z=x$, puis ajoutant les résultats ainsi obtenus, il nous viendra

$$(2)\qquad \log(1.2.3\ldots x)=\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}d\alpha}{\alpha}\left(x-\frac{1-e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}\right).$$

Ainsi la question est ramenée à trouver la valeur de l'intégrale définie placée dans le second membre de l'équation (2). Représentons cette intégrale par u et traitons x comme une variable continue. En différenciant nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx}=\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha}-\frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^\alpha-1}\right).$$

3. La fonction $\frac{\alpha}{e^\alpha-1}$ qui sert de coefficient à $e^{-\alpha x}$ et que nous désignerons par $f(\alpha)$ peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances de α. En différenciant plusieurs fois de suite l'équation

$$(e^\alpha-1)f(\alpha)=\alpha,$$

on a

$$\begin{aligned}&(e^\alpha-1)f'(\alpha)+e^\alpha f(\alpha)=1,\\&(e^\alpha-1)f''(\alpha)+2e^\alpha f'(\alpha)+e^\alpha f(\alpha)=0,\\&(e^\alpha-1)f'''(\alpha)+3e^\alpha f''(\alpha)+3e^\alpha f'(\alpha)+e^\alpha f(\alpha)=0,\text{etc.};\end{aligned}$$

de sorte qu'en posant $\alpha=0$ on trouve sans difficulté

$$f(0)=1,\ f'(0)=-\frac{1}{2},\ f''(0)=\frac{1}{6}\cdots\cdots$$

Les deux premiers termes du développement de $f(\alpha)$ sont donc $1-\frac{\alpha}{2}$; et les autres ne peuvent contenir que des puissances paires de α, car la différence $f(\alpha)-1+\frac{\alpha}{2}$ est égale à la moitié de

$$\frac{\alpha\left(e^{\frac{\alpha}{2}}+e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)}{e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}}}-2,$$

et par conséquent est une fonction paire de α.

Les valeurs générales de $f''(\alpha)$ et de $f'''(\alpha)$ sont

$$f''(\alpha) = \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^3}[(\alpha - 2)e^\alpha + \alpha + 2],$$

$$f'''(\alpha) = -\frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^4}[(\alpha - 3)e^{2\alpha} + 4\alpha e^\alpha + \alpha + 3].$$

En se rappelant que la variable α est > 0, on peut prouver que la première de ces deux dérivées est essentiellement positive et la seconde essentiellement négative.

D'abord en posant

$$P = (\alpha - 2)e^\alpha + \alpha + 2,$$

on a

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha - 1)e^\alpha + 1, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = \alpha e^\alpha.$$

Pour toute valeur de $\alpha > 0$, on a $\frac{d^2P}{d\alpha^2} > 0$: on a aussi $\frac{dP}{d\alpha} > 0$ et $P > 0$, puisque $\frac{dP}{d\alpha}$ et P s'annulent pour $\alpha = 0$ et prennent ensuite le signe de leur dérivée. Il suit évidemment de là que $f''(\alpha)$ est une quantité positive.

Posons maintenant

$$P = (\alpha - 3)e^{2\alpha} + 4\alpha e^\alpha + \alpha + 3,$$

ce qui donne

$$\frac{dP}{d\alpha} = (2\alpha - 5)e^{2\alpha} + (4\alpha + 4)e^\alpha + 1,$$

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = (4\alpha - 8)e^{2\alpha} + (4\alpha + 8)e^\alpha :$$

en faisant

$$Q = (\alpha - 2)e^\alpha + \alpha + 2,$$

nous aurons

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} = 4e^\alpha Q,$$

de manière que les deux fonctions Q et $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$ seront de même signe.

Or, Q et $\frac{dQ}{d\alpha}$ sont zéro pour $\alpha = 0$; de plus $\frac{d^2Q}{d\alpha^2}$ est > 0 dès que α surpasse zéro : donc il en est de même de Q et de $\frac{d^2P}{d\alpha^2}$; par suite la fonction P jouit aussi de la même propriété puisque l'on a $P = 0$ et $\frac{dP}{d\alpha} = 0$ quand $\alpha = 0$; il suit évidemment de là que $f'''(\alpha)$ est une quantité négative.

On voit d'après cela que $f''(\alpha)$ est une fonction décroissante de α, dont la plus grande valeur est égale à $f''(0)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}$.

4. Après cette digression, revenons au développement de $f(\alpha)$. D'après une formule connue, nous pourrons écrire

$$\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2} + R,$$

R représentant, suivant que l'on voudra pousser le développement plus ou moins loin, ou la quantité

$$\frac{\alpha^2}{1.2} f''(\theta\alpha),$$

ou la quantité

$$\frac{\alpha^2 f''(0)}{2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)};$$

c'est ce que l'on comprendra en se rappelant que R est une fonction paire de α : à peine est-il nécessaire d'avertir que θ représente d'une manière générale un certain nombre compris entre 0 et 1. Cette valeur de $f(\alpha)$, substituée dans celle de $\frac{du}{dx}$, fournit

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha}\left(e^{-\alpha} - e^{-\alpha x} + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} - Re^{-\alpha x}\right),$$

c'est-à-dire en vertu de la formule (1),

$$\frac{du}{dx} = \log x + \frac{1}{2x} - \int_0^\infty \frac{Re^{-\alpha x} d\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent

$$u = \mathrm{C} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x + \int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}.$$

Cette valeur de u est en même temps celle de $\log(1.2.3\ldots x)$. Nous prouverons plus tard que la constante C est égale à $\log(\sqrt{2\pi})$.

5. On trouve aisément les limites de l'erreur que l'on commettrait en négligeant dans le second membre le terme

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}.$$

A cause de

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha^2 f''(\theta\alpha)}{2},$$

ce terme devient

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}.\,f''(\theta\alpha)\,d\alpha.$$

Il est donc essentiellement positif comme la fonction $f''(\theta\alpha)$. De plus il est moindre que

$$\frac{1}{12}\int_0^\infty e^{-\alpha x}d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12x},$$

puisque l'on a $f''(\theta\alpha) < \frac{1}{6}$.

Cette discussion nous montre qu'en désignant par μ un certain nombre compris entre 0 et 1, on peut poser

$$\log(1.2.3\ldots x) = \mathrm{C} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{\mu}{12x}.$$

6. Si l'on prend

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha^2 f''(0)}{1.2} + \ldots + \frac{\alpha^{2n} f^{2n}(0)}{1.2\ldots 2n} + \frac{\alpha^{2n+2} f^{2n+2}(\theta\alpha)}{1.2\ldots(2n+2)},$$

le terme

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{R}e^{-\alpha x}\,d\alpha}{\alpha^2}$$

se présentera sous une autre forme; il deviendra

$$\frac{f''(0)}{2x} + \ldots + \frac{f^{2n}(0)}{2n(2n-1).x^{2n-1}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}.\alpha^{2n} f^{2n+2}(\theta\alpha)\,d\alpha}{1.2\ldots(2n+2)},$$

et si l'on veut avoir une limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale dont il dépend, il suffira de remplacer $f^{2n+2}(\theta\alpha)$ par le maximum absolu M de $f^{2n+2}(\alpha)$, ce qui permettra d'effectuer l'intégration.

7. Pour déterminer la constante C, mettons l'équation

$$\log(1.2.3\ldots x) = C + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{\mu}{12x}$$

sous la forme

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log x = C + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x + \text{etc.},$$

le signe etc. désignant un terme qui s'annule quand $x = \infty$.

Nous en tirerons facilement

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log 2x = C + \left(2x + \tfrac{1}{2}\right)\log 2x - 2x + \text{etc.}$$

A cause de

$$\log 2 + \log 4 + \ldots + \log 2x = x\log 2 + \log 1 + \log 2 + \ldots + \log x,$$

nous aurons aussi

$$\log 2 + \log 4 + \log 6 + \ldots + \log 2x = C + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x + x\log 2 - x + \text{etc.}$$

Retranchant cette équation de celle qui donne la somme des logarithmes des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $2x$, on obtient

$$\log 1 + \log 3 + \log 5 + \ldots + \log(2x-1) = x\log x + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log 2 - x + \text{etc.}$$

Retranchant à son tour le double de cette nouvelle équation du double de la précédente, il vient enfin

$$\left.\begin{array}{l} 2\log 2 + 2\log 4 + 2\log 6 + \ldots + 2\log(2x-2) + \log 2x \\ -2\log 1 - 2\log 3 - 2\log 5 - \ldots - 2\log(2x-3) - 2\log(2x-1) \end{array}\right\} = 2C - 2\log 2 + \text{etc.},$$

de sorte qu'à l'aide de la formule de Wallis, citée plus haut, on trouve en faisant x infini,

$$\log\pi - \log 2 = 2C - 2\log 2,$$

et par suite

$$C = \tfrac{1}{2}(\log\pi + \log 2) = \log\left(\sqrt{2\pi}\right).$$