JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

THÉODORE OLIVIER

# Construction géométrique d'un engrenage dans lequel les axes des deux roues dentées ne sont pas situés dans un même plan et comprennent entre eux un angle plus petit que l'angle droit, les vitesses étant dans un rapport constant et le frottement étant de roulement angulaire

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 4 (1839), p. 304-316.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__304_0>

gallica NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France*
*http://gallica.bnf.fr/*

*et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc*
*http://www.numdam.org/journals/JMPA*

# CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

# D'UN ENGRENAGE

DANS LEQUEL

*Les axes des deux roues dentées ne sont pas situés dans un même plan et comprennent entre eux un angle plus petit que l'angle droit, les vitesses étant dans un rapport constant et le frottement étant de roulement angulaire ;*

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

(Mémoire présenté à l'Institut en décembre 1825.)

Étant donnés deux axes P et Q qui ne se rencontrent point et qui sont dirigés d'une manière arbitraire dans l'espace, comprenant par conséquent entre eux un angle quelconque $\alpha$, on demande s'il est possible (d'après les principes géométriques sur lesquels repose la construction des engrenages cylindriques et coniques de With), de construire deux roues dentées se conduisant par un frottement de roulement, et les vitesses angulaires de ces axes étant dans un rapport constant.

Jusqu'à présent l'on a cru qu'il n'était pas possible de transmettre le mouvement d'un axe à un autre dans le cas où ces axes n'étaient point dans un même plan, par un engrenage formé de deux roues seulement, excepté lorsque les axes étaient à angle droit, et alors on avait le système connu sous le nom d'*engrenage à vis sans fin.* Mais lorsque l'angle compris entre les deux axes était plus petit ou plus grand qu'un droit, l'on avait recours à une troisième roue doublement dentée, dite supplémentaire, dont l'axe coupait les deux axes donnés, et le mouvement se transmettait par le système de deux engrenages coniques, la roue intermédiaire étant formée de deux roues dentées coniques juxtaposées par leur grande base.

Supposons que le plan vertical de projection soit parallèle aux deux axes donnés et que le plan horizontal de projection soit perpendiculaire à l'un des axes P, par exemple, l'autre étant désigné par Q, fig. 9. Dès-lors l'axe P aura pour projection verticale la ligne $oV$ perpendiculaire à la ligne de terre LT et pour projection horizontale le point $o$. (Nous supposons que l'axe P est situé dans le plan vertical de projection.) L'axe Q aura pour projection verticale la droite $oH$ faisant avec $oV$ un angle $\alpha$ arbitraire, et pour projection horizontale la droite $nH'$ parallèle à la ligne de terre; de sorte que la ligne $on$ perpendiculaire à la ligne de terre sera la projection horizontale de la plus courte distance entre les deux axes P et Q, et le point $o$ sera la projection verticale de cette plus courte distance.

Les vitesses de rotation des deux axes sont données. Désignant par V la vitesse de l'axe P et par $v$ celle de l'axe Q, $\frac{V}{v}$ sera le rapport des vitesses des axes du système.

Si sur la ligne $on$ je prends un point $p$ tel que l'on ait $op:pn::v:V$, c'est-à-dire tel que ses distances aux deux axes donnés P et Q soient dans le rapport inverse des vitesses de ces axes, je pourrai regarder le point $n$ comme le centre d'un cercle dont le rayon serait égal à $np$ et dont le plan serait perpendiculaire à l'axe Q. J'appelle ce cercle $c$.

Je pourrai aussi regarder le point $o$ comme le centre d'un cercle dont le rayon serait égal à $op$ et dont le plan serait perpendiculaire à l'axe P. J'appelle ce cercle C.

Les plans de ces deux cercles se coupent suivant la droite $on$ située sur le plan horizontal, et ces deux cercles ne se coupent que suivant le seul point $p$; si l'on fait mouvoir les deux axes P et Q et que par leur mouvement de rotation ils entraînent avec eux les deux cercles $c$ et C, ces deux cercles rouleront l'un sur l'autre, c'est-à-dire qu'un point de l'un d'eux ne se mettra jamais en contact qu'avec un seul point de l'autre cercle. Mais comme au point commun les tangentes à ces cercles font entre elles un angle, nous avons désigné ce genre de roulement par les mots *roulement angulaire*.

Ainsi le frottement qui existera entre les deux cercles $c$ et C ne sera point un frottement de glissement, mais bien de roulement, et qui dans ce cas, vu la position qu'affectent les deux courbes l'une par rapport à l'autre, n'est point de même nature que lorsque les tangentes au point commun se confondent. Dans ce dernier cas les courbes ont un contact, et depuis long-temps le frottement de cette espèce est connu et désigné ainsi : frottement de *roulement direct*.

Mais dans le cas que nous examinons les deux cercles se coupent et nous adopterons la dénomination de frottement de *roulement angulaire*.

Si maintenant on construit une ligne D passant par le point dont les projections sont $p$ et $o$, et telle que les distances de chacun de ses points aux deux axes P et Q soient dans un rapport constant et inverse de celui des vitesses des axes, cette ligne D engendrera par son mouvement autour de l'axe P une surface de révolution $P_1$ et par son mouvement de rotation autour de l'axe Q une deuxième surface de révolution $Q_1$, qui se couperont suivant la ligne D et une courbe $\delta$. Chacun des points de la ligne D décrira soit autour de P soit autour de Q des cercles qui se couperont deux à deux de la même manière que les cercles $c$ et C; de sorte que si sur la surface $P_1$ je trace une courbe arbitraire $\xi$ et que je fasse mouvoir cette surface $P_1$ autour de son axe P, elle entraînera la surface $Q_1$ sur laquelle la courbe $\xi$ laissera pour empreinte une courbe $\xi'$, et ces deux courbes seront évidemment telles qu'un point de l'une d'elles ne se mettra jamais en contact qu'avec un seul point de l'autre.

Ainsi les deux courbes $\xi$ et $\xi'$ auront un frottement de roulement; et comme il est évident que leurs tangentes au point commun font un angle entre elles (comme on peut s'en assurer en construisant ces tangentes par la méthode de Roberval), ce frottement sera *angulaire*.

Si maintenant, par une position de rencontre de $\xi$ et $\xi'$, je fais passer un plan T par les deux tangentes à ces courbes, ce plan sera tangent aux deux courbes; et si dans ce plan je mène une droite quelconque R passant par le point commun aux deux courbes et par cette droite un plan N perpendiculaire au plan T, et qu'ensuite dans le plan N je construise deux courbes $\gamma$ et $\gamma'$ ayant pour tangente commune la droite R, l'une de ces courbes étant en-dessus, l'autre en-dessous de la droite R, ou en d'autres termes, deux courbes se tournant leur convexité; et que je fasse mouvoir le plan N de manière qu'il soit toujours perpendiculaire aux différents plans T', T'', T''', etc. passant par les tangentes qui se croisent aux points successifs de rencontre des courbes $\xi$ et $\xi'$, et que la droite R soit toujours l'intersection du plan N avec ces différents plans tangents aux deux courbes, les courbes $\gamma$ et $\gamma'$ auront formé deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ qui seront tangentes l'une à l'autre dans toutes les positions qu'elles prendront par le mouvement de rotation des axes P et Q, ces deux filets ou dents $\Sigma$ et $\Sigma'$ se conduiront par un frottement de roulement *angulaire*, et le rapport des vitesses des deux roues dentées sera constant et égal à celui des axes, c'est-à-dire à $\frac{V}{v}$.

Cherchons maintenant quelle est la nature de la ligne D. Je dis que cette ligne sera une droite dont la projection horizontale sera $pg$ parallèle à la ligne de terre, et dont la projection verticale sera $o$G partageant l'angle $\alpha$ en deux, dont les sinus seront dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q.

En effet, il faut qu'un point de l'espace dont les projections sont $m$, sur le plan vertical et $m'$ sur le plan horizontal, soit tel que ses distances aux deux axes P et Q se trouvent être dans le rapport inverse des vitesses de ces axes. Si par ce point je mène les droites $mh$ et $mq$ respectivement perpendiculaires aux projections verticales des axes P et Q, elles seront les projections verticales des distances du point de l'espace aux deux axes. La distance du point $(m, m')$ à l'axe P sera donc en véritable grandeur la ligne $om'$, hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est $m'o' = op$, et l'autre la ligne $mh'$. La distance du point $(m, m')$ à l'axe Q sera donc en véritable grandeur la ligne $m'r'$, hypoténuse d'un triangle dont l'un des côtés est $m'n' = pn$, et l'autre la ligne $n'r' = mr = mq$. Or il faut que l'on ait

$$om' : m'r' :: m'o' : m'n' :: op : pn :: v : V.$$

Par conséquent $n'r' = mq$ doit être à $o'o = mh$ dans le même rapport $v : V$. Ainsi les deux lignes menées du point $m$ perpendiculairement aux projections verticales des axes P et Q seront dans le rapport inverse des vitesses de ces axes; par conséquent, tous les points de la droite $(o\mathrm{G}, pg)$ satisferont à cette condition. Ainsi la ligne D est une droite dont les projections sont $o$G et $pg$, la projection verticale $o$G partageant l'angle $\alpha$ en deux angles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tels que leurs sinus sont dans le rapport inverse des vitesses des axes P et Q; la projection horizontale $pg$ étant parallèle à la ligne de terre.

Ainsi les deux surfaces $P_1$ et $Q_1$ sont deux hyperboloïdes à une nappe et de révolution se coupant suivant une génératrice sur laquelle se mouvra le point de contact des deux dents $\Sigma$ et $\Sigma'$.

Ces deux hyperboloïdes se couperont encore suivant une courbe du troisième degré, mais on ne doit y faire aucune attention, puisque l'on peut ici faire la même remarque que pour le cas des engrenages cylindriques dans lesquels les surfaces cylindriques idéales, contenant la ligne droite, lieu des contacts successifs des dents, n'étaient point tangentes suivant cette ligne, mais se coupaient suivant elle; ainsi les deux filets $\Sigma$ et $\Sigma'$ n'ont qu'un seul point commun dans chaque position et ils ne peuvent point avoir de contact suivant aucun point de la courbe du troisième degré, mais seulement suivant les points de la génératrice d'intersection par rapport à laquelle on a fait les constructions.

Dans la pratique, on peut pour plus de facilité supposer que les courbes $\xi$ et $\xi'$ sont des spirales tracées sur les hyperboloïdes, réduire la surface $\Sigma'$ à la courbe $\xi'$ et supposer que la surface $\Sigma$ est engendrée par une droite au lieu de l'être par la courbe $\gamma$.

Dès-lors la surface $\Sigma$ sera un filet de vis hyperboloïdique, et l'on voit que les surfaces hyperboloïdes $P_1$ et $Q_1$ sont idéales, c'est-à-dire n'existent que par la pensée. Il n'existe de l'hyperboloïde $P_1$ que la spirale $\xi$ qui fait partie de la surface $\Sigma$ du filet de vis, et de l'hyperboloïde $Q_1$ que la spirale $\xi'$. On pourra construire autant de filets qu'on le voudra, mais pour que le mouvement de rotation puisse se continuer, il faudra que ces filets ou dents soient équidistants sur l'une et l'autre roue.

Ainsi, autant il y aura de spirales telles que $\xi'$, $\xi'_{,}$, etc. qui couperont la génératrice des hyperboloïdes idéaux, autant il y aura de dents par lesquelles les roues seront en contact.

On doit remarquer que pour le point $p$ situé sur la plus courte distance des axes P et Q, les deux hyperboloïdes sont tangents, et que les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ le seront aussi en ce même point; que par conséquent, pour ce point, le plan T sera vertical et parallèle aux deux axes P et Q. (Les deux courbes $\xi$ et $\xi'$ étant supposées avoir pour point commun ce point $p$.)

Lorsque les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ par le mouvement de rotation seront en contact suivant un autre point $m$ de la droite ($o$G, $pg$), alors le plan $T^{(m)}$ correspondant à ce point commun aux deux courbes $\xi$ et $\xi'$ coupera l'axe P et l'on prendra pour génératrice de la surface $\Sigma$, en supposant que $\Sigma'$ se réduise à la courbe $\xi'$, la droite qui passera par le point $m$ commun aux deux courbes $\xi$ et $\xi'$ et par celui où le plan $T^{(m)}$ coupera l'axe P.

On voit donc que la surface $\Sigma$ sera engendrée par une droite qui s'appuiera sur l'axe P et la courbe $\xi$ et qui aura son mouvement réglé par la condition qu'elle soit toujours contenue dans le plan passant par les deux tangentes aux courbes $\xi$ et $\xi'$ au point qui leur est commun. Cette génératrice pour le point $p$ sera parallèle à l'axe P, et pour le point situé à l'infini sur la droite ($o$G, $pg$), elle sera horizontale.

On doit encore remarquer que la droite ($o$G, $pg$) n'est pas la seule qui satisfasse au problème; on peut encore, par le point $p$ situé sur la plus courte distance, faire passer une droite ($o$G$'$, $pg$) qui soit contenue dans un plan parallèle aux deux axes P et Q, et qui divise le supplément de l'angle $\alpha$ de ces axes en deux dont les sinus seront dans le rapport inverse de leurs vitesses.

On peut encore sur la plus courte distance prendre un point $p'$ tel que $p'o : p'n :: v : V$, et par ce point faire passer deux droites respectivement parallèles aux droites ($o$G, $pg$), ($o$G$'$, $pg$).

Ainsi, l'on peut satisfaire au problème par quatre systèmes différents formant ou deux engrenages intérieurs, ou deux extérieurs. Si l'on voulait résoudre le problème par l'analyse, on aurait un nombre infini de solutions. Car on trouverait que la surface qui jouit de la propriété d'avoir ses points distants des deux axes P et Q, dans un rapport constant, est une hyperboloïde à une nappe non de révolution et passant par les points $p$ et $p'$ de la plus courte distance; par conséquent l'on peut prendre pour la ligne D une courbe arbitraire tracée sur la surface hyperboloïdique que nous venons d'indiquer; mais je n'ai voulu donner ici que les lignes D qui pourraient être déduites par la Géométrie.

Dans un mémoire intitulé *Théorie générale des Engrenages à la*

*With*, je donnerai la solution analytique et complète de ce problème.

Dans les engrenages hyperboloïdiques dont je viens de donner la construction, l'on n'a point à craindre l'inconvénient que j'ai signalé dans les engrenages cylindriques ou coniques construits par With, savoir : que lorsque la génératrice de la surface héliçoïde de la dent était perpendiculaire à la ligne droite sur laquelle se mouvait le point de contact des dents, les roues pouvaient prendre deux positions différentes de contact, et trois positions de contact lorsque la génératrice de la surface était inclinée par rapport à la ligne des contacts des dents.

Cet inconvénient n'existe pas ici, parce que les plans tangents aux divers points où les surfaces des dents coupent la droite ($o$G, $pg$), lieu des contacts, ne sont point parallèles entre eux. En effet, supposons une surface courbe $\Sigma$ et une courbe $\xi'$, $\Sigma$ et $\xi$ ayant un point de contact. Nommons $t\xi'$ la tangente à la courbe $\xi'$ au point $m$ et T le plan tangent au point $m$ à la surface $\Sigma$, ce plan T contiendra la droite $t\xi'$. Par le point $m$, élevons une droite N perpendiculaire au plan T. Si l'on fait tourner la courbe $\xi'$ autour de N comme axe, on engendrera une surface de révolution S tangente à $\Sigma$ au point $m$, et la courbe $\xi'$ pourra prendre autour de N une infinité de positions dans lesquelles elle sera toujours tangente à la surface $\Sigma$.

Mais si par le point $m$ on mène une droite N' inclinée par rapport au plan T et telle que l'angle formé par N' et $t\xi'$ soit l'angle de N' avec le plan T, alors la courbe $\xi'$ ne pourra plus tourner autour de N' en restant tangente au point $m$ à la surface $\Sigma$; dans toute autre position que celle qu'elle affecte primitivement, elle coupera la surface $\Sigma$. Si la ligne N' ne fait point avec $t\xi'$ l'angle le plus petit ou le plus grand qui existe entre elle et le plan T dans la position qu'on lui a donnée, alors on pourra, par le point $m$, mener dans le plan T une droite $t'$ qui fasse avec N' un angle égal à celui que font entre eux la droite N' et le plan T; et dès-lors, si l'on fait tourner la courbe $\xi'$ autour de N', il y aura un moment où la droite $t\xi'$ prendra une position $t''$, telle que l'angle $t'mt'' = tmt'$, et en cette position la courbe $\xi'$ sera encore tangente à $\Sigma$; mais dans toute autre position $\xi'$ coupera $\Sigma$.

Si donc nous désignons les deux axes par P et Q; si nous nommons R la génératrice suivant laquelle les deux hyperboloïdes se coupent (désignant par HP l'hyperboloïde qui a pour axe P, et par HQ celui qui a pour axe Q); si nous supposons (fig. 10) que l'on ait trois dents sur HP coupant R aux points $m'$, $m''$, $m'''$, la surface de la première dent étant désignée par $\Sigma'$, celle de la seconde par $\Sigma''$, et celle de la troisième par $\Sigma'''$, l'on aura sur l'hyperboloïde HQ trois dents correspondant à celles situées sur HP. Ces dents seront terminées par trois courbes $\xi'_{,}$, $\xi''_{,}$, $\xi'''_{,}$, la première passant par le point $m'$, la deuxième par $m''$ et la troisième par $m'''$; sur la surface $\Sigma'$ existera une courbe $\xi'$ correspondante de $\xi'_{,}$, et telle que ces deux courbes par le mouvement de rotation se conduiront par un contact angulaire, les points de contact étant successivement sur les divers points de la droite R et le premier contact étant en $m'$; de même sur $\Sigma''$ on aura la courbe $\xi''$ passant par le point $m''$, et sur $\Sigma'''$ la courbe $\xi'''$ passant par le point $m'''$.

La génératrice de la surface $\Sigma'$ correspondant au point $m$ sera une droite contenue dans le plan qui contient les deux tangentes à $\xi'$ et $\xi'_{,}$ au point $m'$ et passant par l'axe P. Nous nommerons $t'$ la tangente à $\xi'$, $t'_{,}$ la tangente à $\xi'_{,}$, et $g'$ la génératrice. Nous aurons de même au point $m''$, les tangentes $t''$, $t''_{,}$ et la génératrice $g''$ de la surface $\Sigma''$; nous aurons de même au point $m'''$ les trois droites $t'''$, $t'''_{,}$ et $g'''$.

Les droites $g'$, $g''$, $g'''$ ne feront point avec l'axe P le même angle, d'après ce que nous avons dit, le point $m'$ étant le plus près de celui qui est situé sur la plus courte distance des axes P et Q, il arrivera que l'angle $\delta'$ formé par P et $g'$ sera plus petit que l'angle $\delta''$ formé par P et $g''$, et plus petit que $\delta'''$ formé par P et $g'''$.

Par conséquent, les trois points $m'$, $m''$, $m'''$, en tant qu'appartenant à la surface HQ, ne pourront se placer que sur les points $m'$, $m''$, $m'''$ des droites $g'$, $g''$, $h'''$. Aucuns autres points $n'$, $n''$, $n'''$, en ligne droite et situés respectivement sur les génératrices $g'$, $g''$, $g'''$, ne pourront se mettre en contact avec eux; par conséquent la position respective des deux hyperboloïdes HP et HQ est déterminée d'une manière invariable. Les roues de l'engrenage ne pourront donc prendre une autre position que celle qui leur est assignée par la construction.

La génération de la surface $\Sigma$ qui doit terminer la dent de la roue HP pourrait présenter des difficultés dans l'exécution pratique; je proposerai donc de construire les dents de l'engrenage de la manière suivante :

Étant donnés deux axes P et Q et une droite R telle que tous ses points soient distants des deux axes dans un rapport constant et inverse de celui de leurs vitesses respectives, l'on obtiendra, ainsi que nous l'avons dit plus haut, en faisant tourner la droite R autour de P pour surface de révolution, un hyperboloïde à une nappe HP; de même en faisant tourner R autour de Q, on aura la surface HQ. Ces deux surfaces se couperont suivant la droite R passant par un point de la plus courte distance qui existe entre P et Q, et une courbe du troisième degré $\gamma$ qui passera aussi par le point où R coupe la plus courte distance. Cela posé : Si l'on divise la droite R en $(n-1)$ parties égales entre elles, par les points $m'$, $m''$, $m'''\ldots m^{(n)}$, et que par chacun de ces points on mène des plans perpendiculaires à l'axe P, l'on aura pour intersections dans la surface HP des cercles. Désignant l'un de ces cercles par C; si par l'axe P l'on mène une suite de plans méridiens au nombre de $(n-1)$, ils diviseront le cercle C en $(n-1)$ arcs égaux, ainsi que tous les cercles parallèles à celui-ci, et la courbe qui passera par le premier point situé sur le cercle $Cm'$, par le deuxième point situé sur $Cm''$, par le troisième point situé sur $Cm'''$ et enfin par le dernier point $m^{(n)}$ ou le $(n-1)^{e}$ situé sur le cercle $Cm^{(n)}$, sera une spirale hyperboloïdique dont le pas sera mesuré sur R par la distance comprise entre les points $m'$ et $m^{(n)}$.

Nous nommerons H ce pas et $\xi$ la courbe spirale. On voit évidemment que cette courbe peut être tracée mécaniquement par un mouvement continu. Si l'on divise de même un cercle $C'$ appartenant à la surface HQ, par une suite de plans méridiens passant par l'axe Q en un certain nombre de parties égales entre elles, ce nombre étant représenté par $(n'-1)$ et tel que le rapport entre $(n-1)$ et $(n'-1)$ soit celui qui existe entre les distances respectives d'un des points de la droite R aux deux axes P et Q, on construira une spirale $\xi_{,}$ qui sera la correspondante de $\xi$; son pas $h$ mesuré sur R sera tel que $\frac{H}{h}=\frac{n-1}{n'-1}$, et ces deux courbes $\xi$ et $\xi_{,}$ se conduiront par un frottement de roulement *angulaire*.

Maintenant, par chacun des points de $\xi$, l'on fera passer des droites perpendiculaires à l'axe P et qui formeront une surface spirale hyperboloïdique; cette surface sera nommée $\Sigma$. De même par $\xi_1$ on fera passer des droites perpendiculaires à l'axe Q et formant aussi une surface spirale hyperboloïdique $\Sigma'$. Ces deux surfaces pendant le mouvement de rotation ne seront en contact que par des points situés respectivement sur les courbes $\xi$ et $\xi_1$. On ne prolongera les surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$, du côté des axes P et Q, et respectivement qu'autant qu'il sera nécessaire pour que la courbe $\xi_1$ puisse passer, puisqu'elle pénètre dans l'intérieur de la surface HP, et pour que la courbe $\xi$ puisse aussi passer, puisqu'elle pénètre aussi elle-même dans l'intérieur de la surface HQ. De sorte qu'il y aura un noyau fixé à l'axe P et à la surface duquel la surface $\Sigma$ s'arrêtera; de même aussi la surface $\Sigma'$ s'arrêtera à la surface d'un noyau fixé à l'axe Q et assez rapproché de cet axe pour permettre un libre mouvement à la courbe $\xi$.

Ensuite l'on donnera à la dent une épaisseur suffisante (comme à un filet de vis). On n'aura pas besoin de lui donner un excès de longueur : on pourra la terminer à l'hyperboloïde HP ou HQ, parce que les deux courbes $\xi$ et $\xi_1$ n'ayant point leur plan tangent commun en chacun de leurs points de contact successifs (excepté pour celui situé sur la plus courte distance), parallèle aux deux axes P et Q, les dents ne pourront s'échapper pendant le mouvement de rotation.

Cette construction pourra s'exécuter facilement sur le tour, et par conséquent l'on peut, je crois, regarder le problème qui fait le sujet de ce Mémoire, comme résolu, soit en théorie, soit en pratique.

Il faut cependant démontrer que la surface $\Sigma$ dans quelque position que ce soit ne rencontrera la courbe $\xi_1$ qu'au seul point de contact angulaire existant entre les deux courbes $\xi$ et $\xi_1$.

Soient P et Q (fig. 11) les deux axes donnés. Soit R la génératrice commune aux deux hyperboloïdes HP et HQ, et en même temps la droite des contacts angulaires successifs des dents de l'engrenage. Soit $\gamma$ la courbe du troisième degré, seconde ligne d'intersection des deux surfaces HP et HQ. Soit $ab$ la plus courte distance entre les axes, le point $d$ étant situé sur cette plus courte distance, de telle manière que $ad$ et $db$ soient dans le rapport inverse des vitesses des axes; la droite R et la courbe $\gamma$ passeront par le point $d$.

Il est évident que si par un point $m$ pris arbitrairement sur la droite R je fais passer deux plans respectivement perpendiculaires aux axes P et Q, l'un coupera HP suivant un cercle C, l'autre HQ suivant un cercle C', tels que le premier coupera la courbe $\gamma$ en un point $m''$ et le deuxième en un point $m'$, et que ces deux points seront toujours dans la même position relative, savoir : que $m'$ sera toujours au-dessous de $m''$, et qu'ainsi, si la droite $m'''mm''$ représente l'intersection des plans des deux cercles, la partie $mm'$ du cercle C' sera toujours en-dessous du plan du cercle C et que la partie $mm'''$ sera toujours au-dessus de ce même plan.

Les deux cercles C et C' sont des courbes correspondantes, c'est-à-dire qu'elles se roulent angulairement, le point de contact se plaçant toujours au point $m$ : pour deux courbes correspondantes, telles que $\xi$ et $\xi_1$; on aura les mêmes résultats, seulement le point de contact variera de position sur la droite R.

Ainsi (fig. 12) les deux courbes correspondantes $\xi$ et $\xi_1$ étant en contact angulaire au point $m$ situé sur R, si je prends sur $\xi$ un point $m''$ qui soit le correspondant du point $m'''$ situé sur $\xi_1$, ces deux points seront tels que les cercles C et C' passant l'un par $m''$, et son plan étant perpendiculaire à P, l'autre par $m'''$, et son plan étant perpendiculaire à Q, se couperont en un point $m'$ situé sur R. Il est évident que toute la portion $mm'''$ de $\xi_1$ sera au-dessous du plan C, et que tous les points de l'arc $mm'''$ seront au-dessus de la surface spirale hyperboloïdique formée par les droites perpendiculaires à P et s'appuyant sur $\xi$; qu'il en sera de même par rapport à la surface spirale ayant Q et $\xi_1$ pour directrices, c'est-à-dire que la partie $mm''$ de $\xi$ sera au-dessus d'elle.

Ainsi les deux surfaces spirales hyperboloïdiques n'auront jamais, dans quelque position que ce soit, qu'un seul point commun, qui sera celui en lequel les courbes $\xi$ et $\xi_1$ ont leur contact angulaire.

Les deux roues dentées étant supposées mises en place, il arrivera, en vertu de la forme géométrique que nous avons donnée aux dents, que la roue qui a pour axe P restant fixe dans sa position, celle qui a pour axe Q, pourra prendre un mouvement de rotation autour de R comme charnière, l'axe Q décrivant un hyperboloïde à une nappe et de révolution autour de R, et que par conséquent les deux roues pourront donner des systèmes différents dans lesquels les axes P et Q comprendront des angles variables ; et comme la ligne R dans chaque système sera la ligne des contacts et que ses distances aux axes P et Q n'auront point changé, il s'ensuivra que le rapport des vitesses sera toujours le même, et que le frottement sera de même nature, c'est-à-dire, de *roulement angulaire*.

Cependant l'axe Q ne pourra pas prendre une infinité de positions par rapport à P et R restés invariables, ces positions auront des limites déterminées par la considération suivante, savoir : que l'axe Q dans son mouvement de rotation autour de R, entraîne la courbe $\xi_1$, et que lorsque cette courbe rencontrera la surface héliçoïde $\Sigma$ qui a pour directrice $\xi$, l'axe Q ne pourra dépasser la position qu'il affectera alors. Que de même lorsque $\xi$ touchera la surface héliçoïde $\Sigma'$ ayant $\xi_1$ pour directrice, l'axe Q ne pourra plus continuer à se mouvoir autour de R, mais entre ces deux positions extrêmes Q pourra prendre toutes les positions intermédiaires. On voit aussi que pour ces diverses positions intermédiaires de Q, la droite R ne passe plus par un point de la plus courte distance des deux axes. Cette considération du mouvement de Q autour de la droite R, qui permet de prendre une infinité de positions sans que les propriétés du système résultant soient changées, excepté l'angle des deux axes, nous démontre que la surface qui doit jouir de la propriété d'avoir ses points distants des deux axes, dans un rapport constant, est nécessairement engendrée par une ligne droite. J'ai dit ci-dessus que l'on savait par l'analyse que cette surface était un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

Dans le système que nous venons de construire, la droite R, en tant qu'appartenant à la surface HQ, ne pourra se placer sur aucune des génératrices du paraboloïde hyperbolique engendré par des droites perpendiculaires à P et s'appuyant sur P et R, la droite R étant une génératrice de cette surface paraboloïde et supposée appartenir aussi à la surface PH ; parce que comme les dents doivent être équidistantes, les génératrices perpendiculaires à P couperont bien toutes les génératrices du deuxième système du paraboloïde en parties égales entre elles, mais non égales à celles qui existent sur la directrice R. Ainsi l'engrenage ne pourra se mettre en contact que par des points situés sur la droite idéale R dont tous les points sont distants des axes P et Q dans le rapport inverse des vitesses de ces axes, le frottement dès-lors sera de roulement *angulaire*, on ne pourra mettre les roues dentées en présence de manière à avoir un frottement de glissement *angulaire*; la pose sera donc facile.

---

La construction géométrique exposée dans ce Mémoire a été trouvée en 1818, à l'École d'Application de Metz; à cette époque j'avais à faire, comme travail d'étude, un projet de machines; je donnai alors les dessins d'une machine propre à tailler les dents de l'engrenage précédent. On peut lire à ce sujet une note de M. Hachette, imprimée dans la deuxième édition de son *Traité des Machines*, à la fin du chapitre *sur les Engrenages*.