JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 1-6.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur l'intégration des Équations linéaires aux Différentielles partielles ;

PAR JOSEPH **LIOUVILLE**.

Soient t, x, y, z des variables indépendantes, a une constante, $\psi(t, x, y, z)$, $f(x, y, z)$, $\mathrm{F}(x, y, z)$ des fonctions connues dont la première contient t qui n'entre pas dans les deux autres. On propose de trouver la fonction φ qui satisfait à l'équation indéfinie

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = \psi(t, x, y, z),$$

et aux conditions définies

$$(2) \qquad \varphi = f(x, y, z), \ \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Lorsque la fonction $\psi(t, x, y, z)$ est supposée indépendante de t et se réduit à $\psi(x, y, z)$, l'équation (1) rentre dans celle que j'ai traitée à la page 435 du volume précédent. La méthode très simple dont j'ai fait usage dans ce cas particulier s'étend aisément au cas général. On peut la présenter comme il suit.

Concevons qu'on ait développé la quantité $\psi(t, x, y, z)$, considérée comme fonction de t, en une série exponentielle de la forme

$\Sigma e^{mt}.\psi_m(x, y, z)$, m étant un exposant qui prend successivement diverses valeurs et le signe Σ indiquant une somme relative à ces valeurs de m. L'équation (1) deviendra ainsi

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = \Sigma e^{mt}.\psi_m(x, y, z).$$

On la vérifiera évidemment, ainsi que les conditions (2), en prenant

$$\varphi = u + \Sigma\varphi_m,$$

u étant déterminé par ce système d'équations

$$(3)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0,$$

$$(4)\qquad u = f(x, y, z),\ \frac{du}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

et φ_m par cet autre système

$$(5)\qquad \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi_m}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_m}{dy^2} + \frac{d^2\varphi_m}{dz^2}\right) = e^{mt}.\psi_m(x, y, z),$$

$$(6)\qquad \varphi_m = 0,\ \frac{d\varphi_m}{dt} = 0,\ \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} = \psi_m(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0:$$

la dernière des équations (6) est au reste une conséquence immédiate de l'équation (5), dont elle se déduit en posant $t = 0$ et observant que, pour cette valeur de t, $\varphi_m = 0$.

La valeur de u est connue depuis long-temps : elle a été donnée par M. Poisson dans son beau Mémoire sur l'intégration de quelques équations différentielles partielles (*Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome III). Cet illustre géomètre a démontré que

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega.$$

Maintenant pour trouver φ_m je différentie l'équation (5) par rapport à t, puis de l'équation différentielle ainsi obtenue, je retranche l'équation (5) après avoir multiplié les deux membres de celle-ci par m. Cette opération fait disparaître la fonction $\psi_m(x, y, z)$, de sorte qu'en posant

$$(7) \qquad \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m = \lambda_m,$$

on obtient

$$(8) \qquad \frac{d^2\lambda_m}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\lambda_m}{dx^2} + \frac{d^2\lambda_m}{dy^2} + \frac{d^2\lambda_m}{dz^2}\right) = 0.$$

D'un autre côté si l'on pose $t=0$ dans les équations

$$\lambda_m = \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - m\frac{d\varphi_m}{dt},$$

et qu'on ait égard aux conditions (6), on trouve

$$(9) \qquad \lambda_m = 0, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \psi_m(x, y, z).$$

La valeur de λ_m se déduira donc de celle de $\overset{\prime\prime}{\varphi}$ en remplaçant la fonction F par ψ_m et la fonction f par zéro. On aura

$$\lambda_m = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi_m(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\sin\omega,\ z + at\sin\theta\cos\omega)\, t\sin\theta d\theta d\omega.$$

Intégrant ensuite l'équation (7) et se rappelant que $\varphi_m=0$ pour $t=0$, on formera la valeur de φ_m, savoir

$$\varphi_m = e^{mt}\int_0^t e^{-mt}.\lambda_m dt,$$

d'où

$$\Sigma\varphi_m = \int_0^t dt\Sigma e^{m(t-t')}.\lambda'_m,$$

λ'_m étant ce que devient λ_m lorsqu'on y change t en t'. Mettant pour λ'_m sa valeur, et observant que la quantité

$$\Sigma e^{m(t-t')}.\psi_m(x + at'\cos\theta,\ y + at'\sin\theta\sin\omega,\ z + at'\sin\theta\cos\omega)$$

est égale à

$$\psi(t-t',\ x + at'\cos\theta,\ y + at'\sin\theta\cos\omega,\ z + at'\sin\theta\cos\omega),$$

on a finalement une valeur de $\Sigma\varphi_m$ exprimée par l'intégrale triple

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\psi - t',\ x + at'\cos\theta,\ y + at'\sin\theta\sin\omega,\ z + at'\sin\theta\cos\omega)t'\sin\theta dt' d\theta d\omega$$

Ainsi les deux parties u et $\Sigma\varphi_m$, dont φ est la somme, sont à présent déterminées. Lorsque $\psi(t, x, y, z)$ se réduit à la forme $e^{mt}.\psi(x, y, z)$, notre valeur de φ s'accorde avec celle que M. Poisson a donnée dans une Note *sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles*, imprimée tome III de ce Journal, page 615.

A peine est-il nécessaire d'observer que le point essentiel de la méthode exposée ci-dessus pour intégrer l'équation (1) est de faire disparaître par une transformation le second membre $\psi(t, x, y, z)$, et de tout ramener au cas où ce second membre est zéro. Les valeurs de u et de λ_m dépendent en effet d'équations semblables à celle dont φ dépendrait si la fonction $\psi(t, x, y, z)$ était nulle. Dans la Note citée plus haut, M. Poisson se sert pour faire disparaître la fonction ψ d'un procédé connu qui consiste à poser $\varphi = p + \varphi'$, p étant une intégrale particulière de l'équation (1). Ce procédé s'applique à toute équation linéaire de la forme

$$\text{(A)} \qquad \Phi = \psi,$$

ψ étant une fonction des seules variables indépendantes t, x, y, z, etc., tandis que tous les termes de Φ contiennent en facteur soit la fonction φ, soit une de ses dérivées partielles. « Mais, ajoute le » savant auteur, il n'y a pas de règles générales et directes pour la » détermination de l'intégrale particulière p, si ce n'est quand il s'agit » d'une équation à coefficients constants, c'est-à-dire lorsque les coef- » ficients de φ et de ses différences dans le premier membre de (A) » sont indépendants de t, x, y, z, etc. »

La méthode que nous avons développée tout-à-l'heure est moins limitée : cette méthode en effet s'étend d'elle-même au cas où les coefficients de φ et de ses dérivées partielles sont variables dans l'équation (A) et fonctions de x, y, z, etc. : pour qu'on puisse l'appliquer, il n'est pas nécessaire que les coefficients dont nous parlons soient indépendants de t, x, y, z, etc.; il suffit qu'ils soient indépendants de t.

Supposons par exemple que P et Q étant deux fonctions de x et y, on sache trouver la fonction u de t, x, y, qui vérifie à la fois l'équation indéfinie

$$\text{(10)} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} - P\frac{d^2u}{dx^2} - Q\frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

et les conditions particulières

$$(11) \qquad u = f(x, y), \quad \frac{du}{dt} = \mathrm{F}(x, y) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Pour trouver une fonction φ qui vérifie l'équation

$$(12) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \mathrm{P}\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \mathrm{Q}\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \psi(t, x, y),$$

et les conditions particulières

$$(13) \qquad \varphi = f(x, y), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{F}(x, y) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

il suffira de développer $\psi(t, x, y)$ en une série exponentielle $\Sigma e^{mt}.\psi_m(x, y)$, puis de prendre

$$\varphi = u + \Sigma\varphi_m,$$

et de déterminer φ_m par l'équation

$$(14) \qquad \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - \mathrm{P}\frac{d^2\varphi_m}{dx^2} - \mathrm{Q}\frac{d^2\varphi_m}{dy^2} = e^{mt}.\psi_m(x, y),$$

et par les conditions définies

$$(15) \qquad \varphi_m = 0, \quad \frac{d\varphi_m}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} = \psi_m(x, y),$$

dont la dernière se déduit au reste de l'équation (14) en y posant $t=0$ et observant qu'alors $\varphi_m = 0$. Maintenant je différentie l'équation (14) par rapport à t, puis de l'équation différentielle ainsi obtenue je retranche l'équation (14) dont je multiplie d'abord les deux membres par m. En faisant

$$(16) \qquad \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m = \lambda_m,$$

je trouve ainsi

$$(17) \qquad \frac{d^2\lambda_m}{dt^2} - \mathrm{P}\frac{d^2\lambda_m}{dx^2} - \mathrm{Q}\frac{d^2\lambda_m}{dy^2} = 0;$$

d'ailleurs les équations

$$\lambda_m = \frac{d\varphi_m}{dt} - m\varphi_m, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{d^2\varphi_m}{dt^2} - m\frac{d\varphi_m}{dt}$$

donnent

$$(18)\qquad \lambda_m = 0,\quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \psi_m(x, y)\quad \text{pour}\quad t = 0,$$

en vertu des conditions (15). La valeur de λ_m se déduira donc de celle de u, supposée connue, en remplaçant F par ψ_m et f par zéro. Ensuite l'équation (16) donnera

$$\varphi_m = \int_0^t e^{m(t-t')} . \lambda'_m dt',$$

λ'_m étant ce que devient λ_m lorsqu'on y change t en t'. On obtiendra donc finalement

$$\varphi = u + \int_0^t dt \Sigma e^{m(t-t')} . \lambda'_m,$$

ce qui résout le problème proposé.

La même méthode peut être appliquée aux équations linéaires simultanées. De plus elle n'exige pas nécessairement que les conditions définies jointes à ces équations se présentent sous la forme admise dans les deux exemples précédents et soient relatives à $t = 0$. Je n'insisterai pas sur ces détails. Il me suffit d'avoir appelé l'attention des géomètres sur une méthode générale trop simple pour n'avoir pas été aperçue par d'autres auteurs et même peut-être employée plusieurs fois, mais dont on ne paraît pas avoir assez apprécié jusqu'ici l'utilité et l'étendue.