JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

THÉODORE OLIVIER

Mémoire de Géométrie descriptive. Théorie de l'osculation des sections coniques et construction d'un cercle osculateur en un point d'une section conique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 189-213.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__189_0>

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Théorie de l'osculation des sections coniques et construction du cercle osculateur en un point d'une section conique ;

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

(Communiqué à la Société Philomatique , le 5 mai 1838.)

I.

Étant donnés deux cônes ayant l'un pour sommet un point S et pour base sur le plan horizontal une courbe B, l'autre pour sommet un point S′ et pour base sur le plan horizontal une courbe B′; si l'on veut connaître la nature de la courbe intersection de ces deux surfaces, on fait mouvoir le cône (S′, B′) parallèlement à lui-même, son sommet S′ glissant le long de la droite D qui unit les sommets S et S′, jusqu'à ce que le sommet S′ se superpose sur le sommet S ; en cette position le cône mobile se trouve coupé par le plan horizontal, suivant une courbe B″ semblable et semblablement placée par rapport à la base primitive B′, le *pôle* de similitude étant le point en lequel la droite D perce le plan horizontal. Cela posé :

Autant il y a de points communs entre les courbes B et B″, autant il doit y avoir de branches infinies, dans la courbe intersection des deux cônes donnés (S, B) et (S′, B′).

Et ces branches infinies se divisent en deux classes, les unes ayant une asymptote, les autres n'ayant pas d'asymptote; on reconnaît l'existence des unes et des autres aux caractères suivants :

Chaque point *de contact* existant entre les deux courbes B et B″ indique une branche infinie sans asymptote, une courbe *parabolique;*

Chaque point *d'intersection* existant entre les deux courbes B et B″, indique une branche infinie ayant une asymptote, une courbe *hyperbolique*.

Ces résultats sont rigoureusement démontrés par la *Géométrie descriptive*, sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*.

II.

Étant donnés deux cônes ayant pour sommet l'un un point S et l'autre un point S', et pour base commune sur le plan horizontal une section conique C (ellipse, parabole ou hyperbole); ces deux cônes se coupent suivant une seconde section conique C'.

Ce résultat peut encore être démontré par la *Géométrie descriptive* sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*.

Si l'on veut reconnaître la nature de la courbe C', il faudra faire mouvoir le cône (S', C) parallèlement à lui-même, son sommet glissant le long de la droite D, qui unit les sommets S et S' jusqu'à ce que le sommet S' se superpose sur le sommet S; en cette position le cône mobile sera coupé par le plan horizontal suivant une section conique C'', qui sera semblable et semblablement placée par rapport à la courbe C, le *pôle* de similitude étant la trace horizontale de la droite D.

En vertu des propriétés de l'hexagone inscrit, propriétés que l'on peut établir et démontrer rigoureusement par la *Géométrie descriptive* sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*, on sait: Que, par cinq points on ne peut faire passer qu'une section conique; et que dès-lors deux sections coniques ne peuvent, en général, se couper qu'en quatre points. Cela posé:

1°. Deux de ces quatre points peuvent être juxtaposés, auquel cas les deux courbes sont tangentes l'une à l'autre, puisqu'elles ont un élément rectiligne commun, en d'autres termes, deux points successifs et infiniment voisins, communs.

Si C et C'' ont un point de contact m et deux points d'intersection p et q, la courbe intersection des deux cônes (S, C) et (S', C) sera composée de une *parabole* indiquée par le point de contact m, et de une *hyperbole* indiquée par les deux points d'intersection p et q.

2°. Trois de ces quatre points peuvent être juxtaposés, auquel cas les deux courbes ont un contact du second ordre, puisqu'elles ont deux éléments rectilignes communs, en d'autres termes trois points successifs et infiniment voisins, communs.

Si C et C″ ont un contact du second ordre en un point *m*, elles se couperont nécessairement suivant un point *p* situé à distance finie du point *m*.

Car puisque l'intersection des deux cônes (S, C) et (S′, C) est nécessairement composée de deux sections coniques, le point *m* étant composé de trois points successifs et infiniment voisins, indique que cette intersection sera composée de deux branches infinies dont l'une sera une *parabole* courbe sans asymptote, et l'autre une branche d'*hyperbole*, courbe ayant une asymptote ; et comme l'*hyperbole* est composée de deux branches infinies, il faudra nécessairement que les deux courbes C et C″ se coupent encore en un point *p*, situé à distance finie par rapport au point *m*.

3°. Les quatre points peuvent être juxtaposés, auquel cas les deux courbes ont un contact du troisième ordre, puisqu'elles ont trois éléments rectilignes communs, en d'autres termes, quatre points successifs et infiniment voisins, communs.

Si C et C″, ont un contact du troisième ordre en un point *m*, elles n'auront aucun autre point d'intersection ; car le contact du troisième ordre indique que les deux cônes (S, C) et (S, C″) ont quatre génératrices successives et infiniment voisines, communes, lesquelles indiquent que les deux cônes donnés (S, C) et S′, C) se coupent suivant deux *paraboles*.

III.

Supposons, maintenant, deux cônes ayant pour leur base commune C une *parabole*. Les deux courbes C et C″ seront deux paraboles égales et parallèles; car un cône ne peut être coupé par un plan P suivant une *parabole* C, qu'autant que ce plan P est parallèle à un plan T tangent au cône suivant une génératrice G et l'on sait que cette génératrice G est parallèle à l'axe infini de la parabole de section.

Ainsi, les deux cônes ayant pour base commune une parabole auront *nécessairement* leurs sommets S et S′ situés sur une droite G parallèle à l'axe infini de la courbe base C, et ces deux cônes auront, *nécessairement*, cette droite G pour génératrice de contact.

Et il est évident que la courbe intersection des deux cônes donnés (S, C) et (S′, C) se composera seulement de la *parabole* C et de la *génératrice* G.

Rappelons-nous qu'une parabole peut dégénérer en une droite, et que la génératrice de contact de deux cônes, doit être *rigoureusement* considérée comme une parabole d'intersection, puisque le plan tangent commun remplace dans ce cas le plan sécant contenant une courbe d'intersection.

Cela posé :

Les deux cônes (S, C) et (S, C'') devant indiquer la nature de l'intersection, doivent indiquer que cette courbe est composée de deux *paraboles*. Or, il est évident que les deux cônes (S, C) et (S, C'') n'ont en commun que la génératrice G; par conséquent, si on les coupe par un plan Q, ce plan coupera la droite G en un point m et les deux cônes (S, C) et (S, C'') suivant deux sections coniques E et E' qui n'auront qu'un point commun m; il faudra donc que ces deux courbes E et E' aient en m un contact du troisième ordre, pour indiquer que la courbe intersection des deux cônes primitifs (S, C) et (S', C) est composée de deux *paraboles*.

Ce qui précède nous permet de résoudre *graphiquement* le problème suivant :

Étant donnée une section conique E, *construire toutes les sections coniques qui auront avec la courbe* E *et en un point m de cette courbe un contact du troisième ordre.*

En effet :

Supposons que l'on donne une section conique E (ellipse, parabole ou hyperbole) et un point m de cette courbe et que l'on veuille construire une section conique E' telle que E et E' aient en m un contact du troisième ordre.

Ayant mené, 1°. la tangente T en m à la courbe E;

2°. Le diamètre D conjugué de la tangente T, et coupant E en les points m et m';

3°. Ayant mené une corde B parallèle à T et coupant E en les points b et b' et le diamètre D au point o;

4°. Ayant pris une parabole P, d'un paramètre arbitraire, et ayant pour axe infini une droite A; on mènera une perpendiculaire à A telle que la corde interceptée B' par la parabole P soit égale à la corde B.

On supposera ensuite que le plan Q de la courbe E passe par la droite B′ et que ce plan a par rapport au plan de la parabole P (regardé comme plan horizontal) une inclinaison arbitraire, et de plus que le point o soit placé sur l'axe A, la tangente T étant parallèle à la corde B′.

Les courbes E et P étant en cette position, on mènera par le point m, une droite G parallèle à la droite A; on unira le sommet p de la parabole P avec le point m' par une droite H, laquelle coupera G en un point S; ce point S sera le sommet du cône enveloppant les deux courbes P et E.

Cela posé :

On prendra sur la droite G un point arbitraire S′ comme sommet d'un second cône ayant la parabole P pour base; on fera glisser le cône (S′, P) parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son sommet S′ se superpose sur le sommet S du cône fixe, et en cette position (que je désigne par S″) le cône mobile sera coupé par le plan de la courbe E suivant une section conique E′ ayant en m un contact du troisième ordre avec la courbe donnée E.

Il sera toujours facile de construire par *points* la courbe E′, au moyen d'une épure; mais pour faciliter les constructions, on pourra toujours supposer que le plan Q est perpendiculaire au plan de la parabole P.

Dès-lors le plan Q devra être pris pour plan vertical de projection et le plan de la parabole P pour plan horizontal de projection.

Cela posé :

Supposons, 1°. que la courbe donnée E est une *ellipse*.

La droite pm' sera toujours oblique par rapport au plan horizontal; le point S sera toujours situé, par rapport au plan Q, au-delà du point x, intersection de la droite G et de la verticale menée par le sommet p de la parabole P.

Dès-lors :

1°. Tant que le point S′ sera au-delà du point S par rapport au plan vertical Q, le cône S″ sera coupé par le plan Q, suivant une *ellipse* E′ enveloppée par l'ellipse E.

2°. Si le point S′ est situé entre les points x et S, le cône S″ sera encore coupé par le plan Q, suivant une *ellipse* E′ mais cette courbe E′ dans ce cas, enveloppera l'ellipse E.

3°. Lorsque le point S′ ne sera autre que le point x, la courbe E′ sera une *parabole* enveloppant l'ellipse donnée E.

4°. Si le point S′ est placé entre le point x et le plan Q, la courbe E′ sera une *hyperbole*.

Nous pouvons donc conclure ce qui suit :

Il existe 1°. une infinité d'*ellipses* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une ellipse donnée : et ces ellipses osculatrices sont divisées en deux groupes, les unes étant enveloppées par la courbe donnée, les autres enveloppant au contraire cette courbe.

2°. Une seule *parabole* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une ellipse donnée, et cette parabole enveloppe la courbe donnée.

3°. Une infinité d'*hyperboles* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une ellipse donnée, et la branche osculatrice enveloppant toujours la courbe donnée.

Supposons 2°. que la courbe donnée E est une *parabole*.

Le point m' sera situé à l'infini sur le diamètre D conjugué de la tangente T ; dès lors le point S sera le point x.

Par conséquent, nous pouvons conclure ce qui suit :

Il existe : une infinité d'*ellipses* et d'*hyperboles* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une parabole donnée et toutes les ellipses osculatrices sont enveloppées par la courbe donnée et toutes les branches d'hyperboles osculatrices enveloppent la courbe donnée.

Supposons 3°. que la courbe donnée E est une *hyperbole*.

Alors la droite pm' coupera la droite G en un point S situé entre le plan vertical Q et le point x.

On peut conclure ce qui suit :

Il existe 1°. une infinité d'*ellipses* ayant un contact du troisième ordre en un point d'une hyperbole et toutes ces ellipses sont enveloppées par la branche de l'hyperbole donnée.

2°. Une seule *parabole* enveloppée par la branche d'hyperbole,

3°. Une infinité d'*hyperboles*, divisées en deux groupes, l'un composé d'hyperboles dont la branche osculatrice est enveloppée par la branche de la courbe donnée, l'autre composé d'hyperboles dont la branche osculatrice enveloppe, au contraire, la branche de la courbe donnée.

Lorsque deux sections coniques E et E′ ont en un point m une osculation du troisième ordre, leurs centres et le point m sont en ligne droite; en d'autres termes, les diamètres correspondants au point de contact m se superposent en direction.

En effet,

Étant donné un cône du deuxième ordre (S, C) dont le sommet est en un point S et qui a pour base une section conique C; si nous supposons que la base C est une parabole, alors il existe une génératrice G parallèle à l'axe infini de la parabole C et le plan tangent T au cône suivant la génératrice G est parallèle au plan de la courbe C.

Si donc nous désignons par d le sommet de la parabole C, la tangente θ en d de cette courbe C sera perpendiculaire, en direction, à la droite G et si nous désignons par G_1 la génératrice du cône passant pas le point d, le plan (S, θ) coupera le plan T suivant une droite θ_1 passant par le sommet S et parallèle à la tangente θ.

Si donc on suppose deux cônes ayant même sommet S et pour base l'un une parabole C et l'autre une parabole C′ (les deux courbes C et C′ étant égales et parallèles, ayant dès-lors même axe infini et même paramètre, les sommets de ces paraboles étant le point d pour C et d' pour C′); les deux cônes auront une génératrice de contact G; cela posé: désignons par θ la tangente en d à C, par θ' la tangente en d' à C′ et par G_1 la génératrice correspondant au point d et par G_1' la génératrice correspondant au point d'.

Il est évident 1°. que les trois plans tangents menés respectivement le long de G, G_1, G_1', se couperont suivant la droite θ_1. 2°. Que les trois génératrices G, G_1, G_1' seront dans un même plan X.

Si donc on coupe les deux cônes par un plan Y parallèle à la droite θ_1 (ce plan sera perpendiculaire à la droite G), on obtiendra deux sections coniques E et E′ qui auront un contact du troisième ordre au point m (intersection de la génératrice G et du plan Y). De plus, le plan Y coupera le plan X suivant une droite qui passera par le centre de chacune des courbes E et E′, car ce plan Y coupera les trois génératrices G, G_1 et G'_1 aux points respectifs m, m_1, m'_1, lesquels seront en ligne droite, et ces points seront situés sur la droite intersection des deux plans X et Y et aussi ce plan Y coupera les plans tangents menés le long de G, G_1 et G'_1 suivant des droites parallèles à θ_1.

Ainsi, la droite qui unit les points m et m_1 sera un diamètre de la courbe E; ainsi, la droite qui unit les points m et m'_1 sera un diamètre de la courbe E′.

Or, si l'on se donne deux courbes E et E′ ayant en un point m un contact du troisième ordre, on pourra par le point m mener une droite G perpendiculaire au plan des deux courbes, prendre sur G un point S arbitraire et regarder ce point S comme le sommet commun de deux cônes ayant pour base respective les courbes E et E′.

Et tout plan parallèle au plan tangent commun aux deux cônes suivant G devra couper les cônes suivant deux paraboles ayant même axe infini et même paramètre.

Ainsi deux courbes du deuxième degré qui ont un contact du troisième ordre, ont *nécessairement* leurs centres et le point d'osculation en ligne droite. De ce qui précède, on conclut,

1°. Qu'un *cercle* ne peut avoir une osculation du troisième ordre en un point quelconque d'une section conique;

2°. Qu'un *cercle* ne peut avoir une osculation du troisième ordre qu'en un point *sommet* d'une section conique.

En effet :

Pour un point quelconque m d'une section conique E, la normale ne passe par le centre de la courbe E, qu'autant que le point m est un sommet de cette courbe; donc, etc.

Par ce qui précède, on peut découvrir une propriété *remarquable* qui n'existe *toujours* que pour deux sections coniques ayant en un point une osculation du troisième ordre. Cette propriété est la suivante :

Concevons deux courbes E et E′ ayant en un point m une osculation du troisième ; menons en m la tangente t commune aux deux courbes ; prenons sur t un point arbitraire x.

Menons par le point x deux tangentes, l'une t_1 à E et l'autre t'_1 à E'; désignons par n_1 et n'_1 les points de contact respectifs, les trois points m, n_1 et n'_1 seront toujours en ligne droite quelle que soit la position du point x sur la tangente t.

En effet :

Imaginons les deux cônes (S, C), (S, C') précédents, si on les coupe par un plan Y' oblique à leur génératrice de contact G, on aura deux sections coniques E et E' ayant au point m une osculation du troisième ordre (m désignant le point intersection de la droite G et du plan Y').

Or, les droites xn_1 et xn'_1 seront : la première, tangente au point n_1 de E et la deuxième, tangente au point n'_1 de E', et les trois points m, n_1 et n'_1 sont évidemment en ligne droite, car ils sont sur la droite intersection des plans Y' et X. Donc, etc.

Remarquons en terminant que : deux sections coniques qui ont en un point m un contact du premier ordre, peuvent bien (en certains cas) avoir leurs centres et ce point de contact en ligne droite et qu'alors elles jouissent de la propriété *remarquable* qui existe *toujours*, ainsi que nous l'avons démontré pour deux sections coniques ayant un contact du troisième ordre.

En effet :

Concevons deux sections coniques B et B' ayant en un point m un contact du premier ordre ; nous pourrons toujours considérer la courbe B comme la base d'un cône S qui serait coupé par un plan P (ayant pour trace sur le plan de la courbe B, la tangente t au point m) suivant une courbe B'' dont la projection sur le plan de la courbe B ne serait autre que la courbe B'; et cela a lieu, parce que deux sections coniques situées dans des plans différents et lesquels se coupent suivant une tangente commune aux deux courbes, sont toujours enveloppées par un cône et que dans ce cas il n'existe qu'un seul cône enveloppant (*Voir* le Mémoire que j'ai publié dans la *Correspondance mathé-*

matique et physique des Pays-Bas, de M. Quetelet, tome III^e, page 126).

Cela posé :

Le sommet S du cône sera situé sur une droite G passant par le point m. Cette droite G pourra être 1°. *perpendiculaire* au plan de la courbe B, ou 2°. *oblique* à ce plan.

Dans le premier cas, les deux courbes B et B′ jouiront de la propriété qui existe *toujours* entre deux sections coniques ayant un contact du troisième ordre.

Dans le deuxième cas, les deux courbes B et B′ ne jouiront pas de cette propriété, mais d'une propriété analogue et qui est la suivante :

Puisque les courbes B et B″ sont sur un cône S, tout plan tangent à ce cône suivant une génératrice G_1 coupera le plan de B″ suivant une droite θ'', et le plan de B suivant une droite θ, ces droites seront les tangentes respectives à ces courbes et iront se couper en un point p situé sur la droite t.

La droite θ'' se projettera sur le plan de la courbe B suivant une droite θ' tangente à B′.

Et comme il en sera de même, quel que soit le plan tangent au cône S et quelle que soit, dès lors, la génératrice de contact G_1, on voit que les droites qui uniront les points de contact des tangentes menées aux courbes B et B′ des divers points p de leur tangente commune t, iront se couper en un point qui sera la projection sur le plan B du sommet du cône S.

Et dans ce deuxième cas, il est évident que les deux courbes B et B′ ne peuvent avoir leurs centres et leur point de contact en ligne droite.

Il serait facile de démontrer en s'appuyant sur les résultats précédents :

1°. Que lorsque deux surfaces du deuxième ordre ont, en un point, un contact du premier ordre, ce point et les centres des surfaces peuvent être ou non en ligne droite;

2°. Que lorsque deux surfaces du deuxième ordre ont en un point, un contact du deuxième ordre, le point d'osculation et les centres de ces surfaces ne sont *jamais* en ligne droite ;

3°. Que lorsque deux surfaces du deuxième ordre ont en un point un contact du troisième ordre, le point d'osculation et les centres de ces surfaces sont *toujours* en ligne droite.

IV.

Supposons sur un plan P deux paraboles C et C′ égales (ayant même paramètre) dont les axes infinis A et A′ soient parallèles; ces deux paraboles étant d'ailleurs tournées dans le même sens et se coupant, dès lors, en un seul point p.

Supposons dans l'espace une droite G parallèle au plan P et aux axes A et A′ et prenons sur cette droite G deux points arbitraires S et S′.

Le point S étant le sommet d'un cône ayant pour base la courbe C et le point S′ étant le sommet d'un cône ayant pour base la courbe C′.

Cela posé :

Supposons que le cône (S, C) reste fixe et que le cône (S′, C′) se meuve parallèlement à lui-même, son sommet S′ parcourant la droite G et désignons par S″ la nouvelle position du cône mobile lorsque son sommet S′ se sera placé sur le sommet S du cône fixe; désignons aussi par C″ la base qui située sur le plan P appartiendra au cône S″.

Il est évident que la courbe C″ sera une parabole ayant même paramètre que la courbe C′ et même axe infini A′ que cette courbe ; dès-lors C et C″ ne se couperont qu'en un seul point et toujours en un seul point que je désigne par p'.

Les deux cônes (S, C) et (S″, C″) ayant même sommet, auront donc la génératrice G pour génératrice de contact et la droite Sp' pour génératrice d'intersection.

Cela posé :

Coupons ces deux cônes par un plan Q, on obtiendra deux sections coniques E et E′ ayant un contact en un point m intersection du plan Q et de la génératrice G et qui se couperont en un point q intersection du plan Q et de la génératrice Sp'.

Les deux courbes E et E′ ayant un contact en m et un point d'intersection en q; le point de contact m indique que les deux cônes (S, C) et (S', C') se coupent suivant une courbe ayant une branche infinie sans asymptote; or cette branche infinie n'est autre que la droite G qui étant une génératrice de contact, représente *rigoureusement* une parabole; les deux cônes (S, C) et (S', C') doivent donc se couper suivant une seconde courbe du second degré;

Mais le point d'intersection q indique que la seconde courbe a une branche infinie ayant une asymptote; la seconde courbe étant du deuxième degré doit donc être une hyperbole, et comme une hyperbole est composée de deux branches infinies ayant chacune une asymptote, il faut, *impérieusement*, qu'au point de contact m, se trouvent juxtaposés trois points successifs et infiniment voisins et communs entre les deux courbes E et E'.

Les deux courbes E et E' ont donc au point m un contact du deuxième ordre, et ce qui précède montre bien que les deux courbes E et E' se touchent et se coupent au point d'osculation du deuxième ordre.

Ce qui précède nous permettra de résoudre *graphiquement* le problème suivant :

Étant donnée une section conique E, *construire toutes les sections coniques qui auront, avec la courbe* E *et en un point m de cette courbe, un contact du deuxième ordre.*

En effet :

Supposons que l'on donne une section conique E (ellipse, parabole, ou hyperbole) et un point m de cette courbe, et que l'on veuille construire une section conique E' telle que E et E' aient en m un contact du deuxième ordre.

Ayant mené, 1°. la tangente T en m à la courbe E;

2°. Le diamètre D conjugué de T et coupant E en les points m et m'.

3°. Ayant mené une corde B parallèle à T et coupant E en les points b et b' et le diamètre D au point o;

4°. Ayant pris une parabole P d'un paramètre arbitraire et ayant pour axe infini une droite A.

On construira pour la parabole P une corde B′ perpendiculaire à A et égale à B.

On fera passer le plan Q de la courbe E par B′, les cordes B et B′ se superposant.

En cette position les courbes E et P seront enveloppées par un cône dont le sommet sera facilement déterminé.

En effet :

Par le point m de E on mènera la droite G parallèle à l'axe A.

On unira le sommet p de la parabole P avec le point m' de la courbe E et la droite $m'p$ coupera G en un point S qui sera le sommet demandé.

Cela posé :

On tracera sur le plan de la parabole P une seconde parabole P′ ayant même paramètre que P et dont l'axe infini A′ sera parallèle à l'axe A.

Ces deux paraboles P et P′ se coupant d'ailleurs en un point p'.

On regardera le point S comme le sommet d'un cône ayant P′ pour base, et ce cône (S, P′) sera coupé par le plan Q suivant une section conique E′ qui aura un contact du deuxième ordre en m avec E et qui coupera E au point q, intersection du plan Q et de la droite Sp'.

Si donc étant donnée une section conique E et deux points m et q situés sur cette courbe, ou voulait construire une section conique E′ coupant E au point q et ayant avec E et au point m un contact du deuxième ordre, on devrait exécuter la construction suivante :

Après avoir déterminé, comme précédemment, le cône (S, P), on joindrait les points S et q par une droite qui couperait la parabole P au point p' et l'on ferait glisser parallèlement à elle-même la courbe P, et dans son plan, jusqu'à ce qu'elle passât par le point p', et cette nouvelle position P′ de P serait regardée comme la base d'un second cône (S, P′) qui serait coupé par le plan Q suivant la courbe osculatrice E′ demandée.

On voit de suite, en se rappelant ce qui a été dit lorsqu'on s'est occupé du contact du troisième ordre, que l'on pourra toujours construire une infinité d'ellipses et d'hyperboles et une seule parabole ayant un contact du deuxième ordre en un point m d'une *ellipse* ou d'une *hyperbole* donnée E et coupant cette courbe E en un point q.

Et que l'on ne pourra construire que des ellipses ou des hyperboles osculatrices du deuxième ordre à une *parabole* donnée E, et coupant cette courbe E en un point situé à distance finie du point d'osculation.

V.

Au lieu d'employer des paraboles pour résoudre le problème qui fait le sujet du § IV, on pourrait se servir de deux hyperboles.

En effet :

Concevons deux hyperboles H et H′ égales, tournées dans le même sens, et ayant pour asymptote commune une droite A, les deux autres asymptotes étant deux droites B et B′ parallèles entre elles.

Ces deux courbes se couperont en un seul point p'.

Si l'on prend un point S dans l'espace, pour le sommet commun de deux cônes ayant pour bases respectives les courbes H et H′, ces deux cônes (S, H) et (S, H′) se couperont suivant une génératrice Sp' et seront tangents l'un à l'autre suivant une génératrice G parallèle à l'asymptote A.

Et il faudra, en vertu de ce que nous avons dit § IV, que les deux cônes aient un contact du deuxième ordre, tout le long de G ou en d'autres termes, que les deux cônes aient en commun trois génératrices successives et infiniment voisines et juxtaposées, en la position G.

Donc, etc., etc.

VI.

Puisque l'on peut toujours construire une infinité d'ellipses ayant en un point m d'une section conique E (ellipse, parabole ou hyperbole) un contact du deuxième ordre avec cette courbe E, on conçoit que l'on pourra toujours trouver un cercle parmi ces ellipses, et dès-lors la solution du problème suivant :

Construire en un point d'une section conique, le cercle osculateur du deuxième ordre à cette courbe ?

Doit être possible par la *Géométrie descriptive*.

En effet :

Il suffira que le cône (S, P'), § IV, soit coupé par le plan Q, suivant un cercle.

Or, on peut toujours s'arranger de manière à ce que le cône (S, P') soit de révolution, car l'on sait que tous les cônes de révolution qui ont pour *base* une *parabole*, ont leurs sommets situés sur la *focale* de la parabole-base ; et l'on sait que cette *focale* n'est autre qu'une parabole P_1 égale à la parabole-base P, et ayant pour sommet le foyer de P ; les plans des deux courbes étant perpendiculaires entre eux et se coupant suivant l'axe infini et commun de P et P_1, ces courbes étant d'ailleurs tournées en sens contraires.

La solution du problème précédent sera donnée par la construction suivante :

Planche I[ère], fig. 1 et fig. 1 *bis*. Étant donnée une *ellipse* E et un point m de cette courbe, pour lequel on veut construire le cercle osculateur ;

1°. On prendra une parabole P d'un paramètre arbitraire dont on connaîtra le sommet S et le foyer f, et par suite, l'axe infini AS.

2°. On tracera la focale P_1 (qui ne sera autre que la parabole P renversée).

3°. On construira la normale ng à la parabole P_1.

4°. On prendra sur la normale en m à la courbe E, $mx = ng$, et par le point x on mènera la corde dd' conjuguée de la tangente t en m.

5°. On construira pour la parabole P, la demi-corde $d_1y_1 =$ la demi-corde dy.

6°. On mènera y_1M parallèle à ng et l'on prendra $My_1 = mx$ et $MM' = mq$.

7°. On joindra les points M' et S et la droite M'S viendra couper en S' la droite Mn parallèle à AS.

8°. Par le point S' on mènera une perpendiculaire à ng, laquelle viendra couper en L la droite MM', et ML sera la longueur du rayon du cercle osculateur demandé.

Pour l'*hyperbole*, les figures 3 et 3 *bis*, et pour la *parabole*, les figures 2 et 2 *bis* indiquent très nettement la construction à exécuter. (Il suffit de remarquer que lorsque la section conique est une *parabole*, MM′ ou mq est infini et que dès-lors la droite SS′ est parallèle à ng ou à sa parallèle My_1.).

Pour obtenir le rayon de cercle osculateur, au sommet d'une section conique, la construction sera identiquement la même.

Remarque. Il pourrait arriver que l'on fût conduit, dans certains cas, à placer sur la parabole P_1 une normale telle que sa partie comprise entre le point de la courbe et l'axe infini fût égale à une longueur prise sur la normale de la courbe E; et qu'ainsi on fût conduit à construire une normale telle que ng (fig. 1 *bis*) fût égale à mx (fig. 1).

Ce problème est d'une construction facile en s'appuyant sur la propriété des focales, savoir : que la *focale* est le lieu des sommets des cônes de révolution ayant pour base la section conique donnée.

Ainsi (fig. 1 *quater*), étant donnée la parabole P et la focale P_1, pour déterminer le point n de P_1 pour lequel la normale $ng = D$ on fera la construction suivante :

On prendra l'ordonnée $ab = D$ de la parabole P; on construira la tangente bn à la courbe P_1, ce qui est facile, puisque la sous-tangente est double de l'abscisse; donc on prendra $fk' = bf$, et l'ordonnée $k'n$ coupera la courbe P_1 en n, point pour lequel la droite ng perpendiculaire à nb satisfera à la condition posée;

Et en effet :

Si du point b on mène la tangente bn à la courbe P_1, le plan passant par ab et perpendiculaire à bn coupera le cône ayant son sommet en n et pour base la parabole P suivant un cercle ayant le point b pour centre et ab pour rayon, puisque ce cône est de révolution et que son axe n'est autre que la tangente bn.

Si donc je mène $bp = ab$ et perpendiculairement à bn, la droite pn sera parallèle à l'axe infini KS de la parabole P.

Si donc en n, je mène ng perpendiculaire à bn, on aura $ng = bp = ab$.

Car les deux triangles rectangles pbn et bng sont égaux, puisque pn et bg sont parallèles.

Ainsi, l'on peut dire :

Le point d'une parabole pour lequel la normale est égale à une droite D a pour demi-sous-tangente la différence existant entre la distance du foyer au sommet de la courbe et l'abscisse du point pour lequel l'ordonnée est égale à la droite D.

VII.

La construction précédente peut être simplifiée si l'on remarque que le lieu des sommets des cônes ayant pour base une parabole P, n'est autre que la parabole focale, transportée parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que son sommet se superpose sur le sommet de la courbe P, lorsque ces cônes satisfont à la condition d'être coupés chacun suivant un cercle par un plan perpendiculaire à l'axe infini de la base P.

En effet :

Fig. 4, soit donnée la parabole P, ayant son sommet en S et pour axe infini la droite SA ; supposons que le point x soit son foyer, et menons la corde mxm' perpendiculaire à SA.

Supposons ensuite que l'on mène par le point x une droite nxn' perpendiculaire au plan de la courbe P, et construisons dans le plan nxm un cercle C ayant mm' pour corde et nn' pour diamètre.

Unissons les points n' et S par une droite, venant couper en S' la droite nS' parallèle à SA. Le point S' sera le sommet d'un cône enveloppant les deux courbes C et P, et ce cône sera coupé par tout plan parallèle au plan nxm suivant un cercle.

Cela posé :

Les deux triangles semblables SpS' et Sxn' donnent :

$$\overline{\mathrm{S}p} : \overline{\mathrm{S}'p} :: \overline{\mathrm{S}x} : \overline{n'x}, \qquad (1)$$

et désignant

$$\overline{\mathrm{S}p} \text{ par } y, \quad \overline{\mathrm{S}'p} = nx \text{ par } z, \quad \overline{\mathrm{S}x} \text{ par } p,$$

(p étant le paramètre de la courbe P),

Et remarquant, 1°. que $\overline{mx} = \overline{2x\mathrm{S}}$ (puisque le point x est le foyer de la courbe P), et 2°. que dans le cercle C on a

$$\overline{mx}^2 = \overline{nx} \cdot \overline{n'x};\ \text{d'où}\ \ \overline{n'x} = \frac{4p^2}{z},$$

la proportion (1) deviendra

$$y : z :: 2p : \frac{4p^2}{z},$$

d'où

$$\frac{4p^2}{z} \cdot y = 2p \cdot z,$$

ou

$$2p \cdot y = z^2.$$

Donc, etc.

En vertu de ce qui précède, la construction du cercle osculateur en un point d'une section conique devient assez simple.

En effet :

Étant donnée une ellipse E, fig. 1.

1°. On tracera, fig. 1 *ter*, deux paraboles P et P_1 égales et opposées par le sommet et ayant même axe infini SA.

2°. On prendra dans la parabole P la demi-corde $d_1 y_1 =$ la moitié de la corde dd' ;

3°. On prendra $My_1 = mx$ et $MM' = mq$;

4°. On mènera MS' parallèle à SA ;

5°. On élèvera la droite $S\nu$ perpendiculaire à SA ; et coupant au point ν la droite MS' ;

6°. On unira le point S' de la parabole P_1 avec le point K milieu de $S\nu$;

7°. On unira les points M' et S et l'on aura le point Q ;

8°. Par le point Q, on mènera QL parallèle à KS' et coupant la droite MM' au point L et LM sera la longueur du rayon du cercle osculateur demandé.

Les fig. 3 et 3 *ter* pour l'*hyperbole*, et 2 et 2 *ter* pour la *parabole*, indiquent très nettement les constructions à exécuter pour obtenir le rayon de courbure de ces courbes.

Il faut cependant remarquer que pour la *parabole*, les points ν et Q se confondent.

Les constructions seront identiquement les mêmes, lorsque l'on voudra construire le cercle osculateur au sommet d'une section conique.

VIII.

Remarquons que les constructions précédentes s'appliqueront, lorsque l'on ne donnera qu'un arc de section conique et sans qu'il soit nécessaire de savoir à quelle espèce de courbe cet arc appartient; ainsi sans savoir si l'arc donné est un arc d'ellipse ou de parabole ou d'hyperbole.

Mais pour pouvoir employer les constructions précédentes, il faut que l'on connaisse la tangente en un point de l'arc donné, connaissant d'ailleurs la tangente au point pour lequel on veut construire le rayon de courbure.

En effet :

Fig. 5. Soit donné un arc $\alpha\beta$ et nous savons que cet arc est une portion de section conique.

En un point K, nous avons la tangente Kr et au point m, point pour lequel on veut construire le rayon du cercle osculateur, on connaît la tangente mt. Cela posé :

Nous mènerons la corde KK′ parallèle à la tangente mt; nous joindrons le milieu o de cette corde avec le point m et le diamètre mo viendra couper la tangente en K au point r, en sorte que la droite rK sera tangente au point K′ de l'arc donné.

Cela posé :

Nous pourrons, ayant mené la normale mq au point m donné, laquelle coupera la corde KK′ au point q et ayant abaissé du point r une perpendiculaire sur KK′, et coupant cette corde au point p, achever la construction ainsi que nous l'avons donné précédemment, ainsi :

Fig. 5 *bis*. Ayant tracé les deux paraboles égales P et P_1 et opposées par le sommet, nous placerons dans la parabole P, la corde $K_1K'_1$ = la corde KK′.

Puis, par le point o' milieu de $K_1K'_1$, nous élèverons la droite $o'r'$ perpendiculaire à l'axe infini AS de la parabole P, prenant $o'm' = qm$ et $o'r' = pr$.

Nous mènerons $m'S'$ parallèle à l'axe AS et coupant la parabole P, en S'; en K_1, nous mènerons une tangente à la parabole P et coupant l'axe infini AS au point x (*).

Nous joindrons r' et x par une droite coupant la ligne $m'S'$ en Q.

Ce point Q sera le sommet du cône oblique enveloppant la parabole P et la section conique dont l'arc nous est donné.

Il suffira donc de mener la tangente $S'v$ en S' à la parabole P, et du point Q une parallèle à cette tangente, laquelle coupera $m'o'$ en u et $m'u$ sera la longueur du rayon de courbure demandé.

Et remarquons qu'au moyen de cette construction, on peut reconnaître la nature de l'arc donné $\alpha\beta$.

En effet :

Fig. 5 *bis*. Ayant au sommet S de la parabole P, élevé la perpendiculaire Sv à l'axe infini AS, et coupant la droite $m'S'$ au point v;

Si 1°. le point Q est au-delà du point v, l'arc appartiendra à une hyperbole;

Si 2°. le point Q n'est autre que le point v, l'arc appartiendra à une parabole;

Si 3°. le point Q est situé entre les points v et S', l'arc appartiendra à une ellipse.

IX.

Les constructions géométriques précédentes nous permettent de parvenir, d'une manière fort simple, aux expressions *analytiques* connues du rayon de courbure, pour un point quelconque d'une section conique.

En effet :

Fig. 6. 1°. Pour l'*hyperbole* : le diamètre réel ou transverse pour le point m' étant mm'; le centre de la courbe étant en o; α étant l'angle que les deux diamètres conjugués font entre eux; $m'p$ étant la normale au point m' de la courbe pour lequel on veut calculer le rayon de courbure; on voit de suite qu'il faut comparer entre eux

(*) Et le point x est facile à construire, puisque pour la parabole, la sous-tangente est double de l'abscisse ; ainsi $Sx = o'S'$.

les deux triangles semblables $m'tS$ et LvK ; lesquels donnent :

$$m't : m'S :: Lv : LK.$$

Et d'abord écrivons $m't = \rho =$ le rayon de courbure cherché $m'S$.

Pour calculer $m'S$, remarquons que les deux triangles semblables $mm'S$ et mga donnent

$$m'S : mm' :: ga : mg.$$

Écrivons $mm' = 2d$, d étant le demi-diamètre transverse correspondant au point m' de la courbe :

$$mg = mO + Og = d + x, \quad gq' = y.$$

Les deux paraboles P et P' qui servent à la construction étant égales, leur équation sera la même pour l'une et l'autre ; ainsi $h^2 = 2p \,.\, k$ (h et k représentant les coordonnées d'un point quelconque de ces courbes).

Cela posé, nous aurons

$$\overline{gq'}^2 = 2p.\overline{ga}, \quad \text{d'où} \quad \overline{ga} = \frac{\overline{gq'}^2}{2.p} :$$

il vient donc

$$\overline{m'S} = \frac{\overline{mm'} \times \overline{ga}}{mg} = \frac{d.y^2}{p(d+x)}.$$

Pour calculer Lv, nous savons que

$$\overline{Lv} = \frac{\overline{Lb}}{2} = \frac{\overline{m'p}}{2} \text{ et que } \overline{m'p} = \frac{m'g}{\sin\alpha} = \frac{x-d}{\sin\alpha}; \text{ donc } Lv = \frac{x-d}{2.\sin\alpha}.$$

Pour calculer LK, on remarque que $LK = bu$, et que $Ku = m'p$: en vertu de l'équation de la parabole P', on a

$$\overline{Ku}^2 = 2p \,.\, \overline{bu}; \quad \text{donc} \quad \overline{LK} = \frac{(x-d)^2}{2p.\sin^2\alpha}.$$

Ainsi, comme

$$m't = \frac{m'S \times Lv}{LK},$$

on a

$$t = \frac{\frac{d.y^2}{p(x+d)} \cdot \frac{x-d}{2 . \sin\alpha}}{\frac{(x-d)^2}{2p . \sin^2\alpha}} = \frac{d.y^2 . \sin\alpha}{(x+d)(x-d)} = \frac{d.y^2 \sin\alpha}{x^2 - d^2},$$

et comme en vertu de l'équation de l'hyperbole $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{d'^2} = 1$ (*),

on a

$$y^2 = \frac{d'^2}{d^2}(x^2 - d^2),$$

on trouve

$$\rho = \frac{d'^2}{d} . \sin\alpha.$$

Si l'angle α est droit, les diamètres conjugués d et d' deviennent les axes a et b de la courbe.

Et puisque dans ce cas $\sin\alpha = 1$, on obtient

$$\rho = \frac{b^2}{a}.$$

2°. Pour l'*ellipse*.

Le diamètre étant $m'm''$, le sommet du cône enveloppant l'ellipse donnée et la parabole P sera en S''.

Il faudra donc calculer M'S'' au lieu de $m'S$, le rayon de courbure étant d'ailleurs $m't''$ au lieu de $m't$; or, pour ce calcul, il suffit de remarquer qu'en désignant $m'm''$ par $2d$, on aura $m''g = d - x$, en sorte que les calculs précédents seront les mêmes, et il suffira de changer $x - d$ en $d - x$ pour avoir le résultat; on aura donc

---

(*) Et rappelons-nous que x et y, coordonnées obliques, sont liées entre elles par l'équation $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{d'^2} = 1$ qui est celle de l'hyperbole donnée; l'origine des coordonnées étant au point o, centre de la courbe; d et d' étant les diamètres conjugués, qui prolongés sont pris pour axes des coordonnées obliques; l'angle de ces axes coordonnés étant α.

$$\rho = \frac{d.y^2 \sin \alpha}{d^2 - x^2}$$

et comme l'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses diamètres conjuguées est $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d'^2} = 1$. On aura encore

$$\rho = \frac{d'^2}{d}. \sin \alpha.$$

3°. Pour la *parabole*.

Le sommet du cône enveloppant la parabole donnée et la parabole P sera en S', et l'on voit de suite que $\overline{m'S'} = \overline{ga}$.

Cela posé :

L'équation de la parabole donnée étant $y^2 = 2p'.x$, et les axes des coordonnées obliques faisant entre eux un angle α, on trouvera

$$\rho = \frac{p'}{\sin \alpha}.$$

Rappelons-nous que $p' = \frac{p}{\sin^2 \alpha}$, dès lors pour un point m' de la parabole, le rayon de courbure aura pour expression $\rho = \frac{p}{\sin^3 \alpha}$.

Et si le point m' est le sommet de la parabole dont le paramètre est $2p$, on aura $\rho = p$, puisque, dans ce cas, $\sin \alpha = 1$.

Remarque. Considérons deux diamètres conjugués d'une ellipse. Désignons par d et d' ces demi-diamètres; par α l'angle qu'ils font entre eux; par ρ le rayon de courbure au point m extrémité du demi-diamètre d, et par ρ' le rayon de courbure au point m' extrémité du demi-diamètre d'.

Les rayons de courbure ρ et ρ' feront aussi entre eux un angle égal à α et l'on aura

$$\rho = \frac{d'^2}{d} \sin \alpha \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{d}{d'} \sin \alpha,$$

d'où

$$\rho\rho' = dd'. \sin^2 \alpha, \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho\rho'}{\sin \alpha} = dd'. \sin \alpha.$$

Or, désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse, on a

$$ab = dd'.\sin\alpha;$$

donc

$$\frac{\varrho\varrho'}{\sin\alpha} = ab,$$

pour deux autres diamètres conjugués, on aura encore

$$\frac{\varrho_1\varrho'_1}{\sin\alpha'} = ab,$$

donc

$$\frac{\varrho_1\varrho'_1}{\sin\alpha'} = \frac{\varrho\varrho'}{\sin\alpha} = \text{constante}.$$

X.

Il est à remarquer que les constructions indiquées § VII, pour trouver la longueur du rayon de courbure pour un point quelconque d'une section conique, n'exigent pas à la rigueur l'emploi de deux paraboles égales et d'un paramètre arbitraire.

En effet :

Fig. 1 *ter.* L'équation de la parabole P ou P_1 étant $y^2 = 2px$ et $2p$ étant arbitraire, il suffira de trouver $\overline{y_1S}$ au moyen d'une droite d'une longueur arbitraire L et de la droite $\overline{ym}$ (*voir* fig. 1), et l'on aura $y_1S = \frac{\overline{ym}^2}{L}$, ainsi $\overline{y_1S}$ se construira comme troisième-proportionnelle.

De même, pour placer le point S' sur la parabole P_1, il suffira de construire l'abscisse $\overline{Sg}$; sachant que l'ordonnée $\overline{S'g} = \overline{y_1M}$, et que $\overline{y_1M}$ (fig. 1, *ter*) $= \overline{xm}$, on aura donc $\overline{S'g} = \frac{\overline{xm}^2}{L}$. Ainsi, $\overline{S'g}$ se construira comme troisième-proportionnelle.

Toutes nos constructions n'exigeront donc à la rigueur que l'emploi de la règle et du compas ; mais si l'on avait à construire une suite de rayons de courbure, ainsi si l'on voulait déterminer les divers points de la développée d'une section conique donnée, l'emploi d'une règle découpée en demi-parabole, telle qu'elle est indiquée fig. 7, serait préférable, parce que les constructions seraient plus promptes qu'en cherchant, pour chaque point, les deux troisièmes-proportionnelles.

Jusqu'à présent on n'avait établi la théorie de l'osculation des sections coniques entre elles, qu'au moyen de l'*analyse*, et les constructions géométriques données pour le rayon de courbure, étaient le résultat de recherches spéciales sur le cercle osculateur; il me semble que les constructions que je donne pour le rayon de courbure, offrent au moins cet avantage, lors même qu'elles seraient un peu plus longues que celles connues et employées, d'être une *déduction* ou *corollaire* de la théorie *géométrique* exposée dans ce Mémoire, touchant l'osculation des courbes du second degré.
