JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TERQUEM

Sur un symbole combinatoire d'Euler et son utilité dans l'analyse

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 177-184.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__177_0>

Sur un symbole combinatoire d'Euler et son utilité dans l'Analyse ;

PAR M. TERQUEM.

1. PROBLÈME. Former les combinaisons m à m des p premiers nombres de la suite naturelle, d'après cette loi : en allant de gauche à droite, les nombres de chaque arrangement doivent procéder en augmentant : le premier à gauche doit être impair ; le second pair ; le troisième impair et ainsi de suite en alternant. On suppose de plus que p et m sont tous deux simultanément pairs ou impairs.

Solution. Le premier arrangement est évidemment $1, 2, 3, \ldots m-2 . m-1 . m$; on augmente successivement m de deux unités, sans rien changer aux autres nombres jusqu'à ce qu'on arrive à l'arrangement $1, 2, 3 \ldots m-1 . p$, le suivant est $1, 2, 3 \ldots m+1 . m+3$; on augmente successivement $m+3$ de deux unités, jusqu'à ce qu'on ait l'arrangement $1, 2, 3 \ldots m+1 . p-1$, etc., etc. ; enfin le dernier arrangement est $m . m+1 . m+2 \ldots 2m-1$.

Exemple. $p=5$: on aura pour

$m = 1$,	les arrangements	1, 3, 5 ;
$m = 3$	. . . .	123,
		125,
		145,
		345,
$m = 5$	. . . .	12345.

2. D'après ce mode de formation, il est aisé de trouver que le nombre d'arrangements, pour les p nombres pris m à m est

$$\frac{(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-m)}{1.2.3\ldots m}\,(1) \quad \text{où} \quad t=\frac{p-m}{2}. \qquad \text{(A)}$$

3. Remplaçant, dans cette expression, p et m, par $2p+1$ et $2m+1$ et faisant successivement $m=0, 1, 2, 3\ldots p$, on aura la suite

$$p+1,\ \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3},\ \frac{(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4.5}\ \text{.etc.}\ldots \quad (B)$$

la somme de tous ces termes est le coefficient de α^p dans le développement de $\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha}$; désignant par α', α'' les deux racines du dénominateur de cette fraction égalé à zéro, on aura pour le terme sommatoire de la série (B), l'expression $\frac{\alpha'^{p+1}-\alpha''^{p+1}}{\alpha'-\alpha''}$; $\alpha'-\alpha''=\sqrt{5}$.

4. Remplaçant dans (A), p et m, par $2p$ et $2m$; et faisant $m=0$, $1, 2, 3, \ldots p$, on trouve

$$1,\ \frac{p(p+1)}{1.2},\ \frac{p-1.p.p+1.p+2}{1.2.3.4},\ \frac{p-2.p-1.p.p+1.p+2.p+3}{1.2.3.4.5.6}.\ \text{etc.},\quad (C)$$

la somme de ces termes est le coefficient de α^p dans le développement de $\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2-\alpha}$; donc le terme sommatoire de la suite (C) est....

$$\frac{\alpha''^{p+1}-\alpha'^{p+1}-(\alpha''^p-\alpha'^p)}{\alpha''-\alpha'}.$$

5. Soient B′ et C′ ce que deviennent B et C lorsque p est remplacé par $p+1$: on a l'identité $B+C'=B'$; on peut donc réunir les deux suites en une seule où chaque terme est égal à la somme des deux précédents, série récurrente résultant du développement de $\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\alpha^2}$; γ et δ étant les racines du dénominateur égalé à zéro, on a pour le terme général

$$(-1)^n\frac{[\gamma^n-\delta^n+\delta^{n-1}-\gamma^{n-1}]}{\delta-\gamma}\ \text{où}\ \delta=2\sin 18°,\ \gamma=-\frac{1}{2}\,\text{séc.}\,18°,\ \delta-\gamma=\sqrt{5}.$$

6. Si l'on désigne par $(1.p)$, la somme de toutes les combinaisons, faites selon la loi énoncée ci-dessus, on a évidemment

$(1.p)=p(1.p-1)+(1.p-2)$ (D), et où $(0)=1$; de là, on tire directement l'identité précédente.

7. Si dans $(1.p-1)$, on augmente chaque nombre d'une unité, on a l'expression combinatoire $(2.p)$; en général, si dans $(1.p-m)$, on ajoute m à chaque nombre, on a l'expression $(m+1.p)$.

8. L'équation (D) fournit cette suite d'équations

$$\begin{aligned}(0) &= 1,\\ (1.1) &= 1,\\ (1.2) &= 2(1)+(0),\\ (3) &= 3(2)+(1),\\ (1.p) &= p(1.p-1)+(1.p-2),\end{aligned}$$

l'on en tire par des substitutions successives

$$(1.p)=p(1.p-m)(p-m+1.p)+(1.p-m-1)(p-m+2.p), \quad \text{(E)}$$

et de là

$$(2.p)=(2.p-m)(p-m+1.p)+(2.p-m-1)(p-m+2.p). \quad \text{(F)}$$

Éliminant de ces deux équations $(p-m+1.p)$, il vient

$$\begin{aligned}&(1.p)(2.p-m)-(2.p)(1.p-m)\\ &=(p-m+2.p)[(1.p-m-1)(2.p-m)-(2.p-m-1)(1.p-m)]. \quad \text{(G)}\end{aligned}$$

9. Faisant dans cette dernière équation $m=1$, on obtient

$$\begin{aligned}&(1.p)(2.p-1)-(2.p)(1.p-1)=(1.p-2)(2.p-1)-(2.p-2)(1.p-1)\\ &=(1.p-2)(2.p-3)-(2.p-2)(1.p-3)=\ldots=(-1)^p, \quad \text{(H)}\end{aligned}$$

donc l'équation G équivaut à celle-ci

$$(1.p)(2.p-m)-(2.p)(1.p-m)=(-1)^p.(p-m+2.p). \quad \text{(I)}$$

10. Soit la fraction continue, $q_1+1:q_2+1:q_3+1:q_4+\ldots+1:q_p$, la valeur de cette fraction est $\frac{(1.p)}{(2.p)}$.

23..

Mais, dans cette expression il faut remplacer les nombres, par les quantités correspondantes; savoir 1 par q_1, 2 par $q_2, \ldots p$ par q_p.

Euler s'est servi de cet algorithme pour développer les propriétés des fractions continues. (Mémoires de Pétersbourg, 1760—61); dans les traités élémentaires, on ne trouve que l'équation (H), et l'on s'en sert pour démontrer que la fraction $\frac{(1.p)}{(2.p)}$ est irréductible, et que le numérateur $(1.p)$ est premier avec le numérateur voisin $(1.p-1)$; mais l'équation générale (I) montre que les numérateurs $(1.p)$ et $(1.p-m)$ sont premiers entre eux, lorsque $(p-m+2.p)$ est un nombre premier.

11. La recherche du plus grand commun diviseur, en arithmétique, mène à une suite d'équations de cette forme :

$$\begin{aligned} a &= a_1q_1 + a_2, \\ a_1 &= a_2q_2 + a_3, \\ a_2 &= a_3q_3 + a_4, \\ &\vdots \\ a_p &= a_{p+1}q_{p+1} + a_{p+2}, \end{aligned}$$

la méthode des substitutions successives donne

$$a = a_p(1.p) + a_{p+1}(1.p-1),$$

équation qui renferme toutes les propriétés relatives au plus grand commun diviseur de deux nombres a et a_1, ou de deux fonctions algébriques entières à une variable; les deux facteurs $(1.p)$ et $(1.p-1)$ sont premiers entre eux (10).

12. Soit maintenant donné ce système d'équations

$$\left.\begin{aligned} la &= a_1q_1 + r_2a_2, \\ l_1a_1 &= a_2q_2 + r_3a_3, \\ l_2a_2 &= a_3q_3 + r_4a_4, \\ &\vdots \\ l_na_n &= a_{n+1}q_{n+1} + r_{n+1}a_{n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (L)$$

On a encore l'équation de relation

$$ll_1l_2l_3\ \ldots\ l_{p-1}a = a_p(1\,.\,p\ldots l,\ r) + r_{p+1}a_{p+1}(1\,.\,p-1\ldots l.r) \quad \text{(M)}$$

Voici comment on obtient la fonction combinatoire $(1\,.\,p\ldots\ l,\ r)$; on forme l'expression $(1\,.\,p)$ d'après la règle indiquée ci-dessus (1); on remplace les nombres par les quantités correspondantes $q_1,\ q_2,\ldots$ q_p; dans chaque arrangement de m de ces quantités, on a m indices, et par conséquent un nombre pair $p-m$ de ces indices qui manquent dans cet arrangement; on forme le produit de $p-m$ facteurs, lr, $lr,\ldots\ lr$; on écrit dessous les indices manquants, dans un ordre ascendant; de sorte que le premier facteur l a le plus petit de ces indices et le dernier facteur r le plus grand de ces indices; on écrit ce produit à la droite de l'arrangement, opérant de même pour chaque arrangement, la somme résultante est désignée par $(1\,.\,p\ldots l.r)$.

Exemple. Soit $p=7$, on a

$$\begin{array}{llll}
(1,7\ldots l.r) = q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7 + & q_1q_2q_3q_4q_5l_6r_7 + & q_1q_2q_3l_4r_5l_6r_7 + & q_1l_2r_3l_4r_5l_6r_7 \\
& q_1q_2q_3q_4q_7l_5r_6 & & \\
& q_1q_2q_3q_6q_7l_4r_5 & q_1q_2q_5l_3r_4l_6r_7 & q_3l_1r_2l_4r_5l_6r_7\ , \\
& q_1q_2q_5q_6q_7l_3r_4 & q_1q_2q_7l_3r_4l_5r_6 & q_5l_1r_2l_3r_4l_6r_7\ , \\
& \vdots & \vdots & \vdots \\
& q_3q_4q_5q_6q_7l_1r_2 & q_5q_6q_7l_1r_2l_3r_4 & q_7l_1r_2l_3r_4l_5r_6\ ,
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
(1,8\ldots l,r)=q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8 + & q_1q_2q_3q_4q_5q_6l_7r_8 + & q_1q_2q_3q_4l_5r_6l_7r_8 + & q_1q_2l_3r_4l_5r_6l_7r_8 \\
\qquad + l_1r_2l_3r_4l_5r_6l_7r_8 & \vdots & \vdots & \vdots \\
& q_3q_4q_5q_6q_7q_8l_1r_2 & q_5q_6q_7q_8l_1r_2l_3r_4 & q_7q_8l_1r_2l_3r_4l_5r_6,
\end{array}$$

et l'on a

$$ll_1l_2l_3l_4l_5l_6a = a_8(1\,.\,8\ldots l.r) + r_9a_9(1\,.\,7\ldots l.r).$$

13. Les équations (L) et (M) renferment : 1. La théorie du plus grand commun diviseur arithmétique et celle des fractions continues, en y faisant égales à l'unité, les quantités $l,\ l_1,\ l_2,\ldots\ r_2,\ r_3,\ldots\ r_n$; 2°. la théorie du plus grand commun diviseur algébrique, en y faisant égales à l'unité, les quantités $r_2,\ r_3,\ldots\ r_n$, et prenant pour $l,\ l_1,$ $l_2,\ldots\ l_n$ les quantités par lesquelles il faut multiplier les dividendes,

pour obtenir des quotients entiers; 3°. la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques $a=0$, $a_1=0$, à deux inconnues; d'après le procédé de M. Bret (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier 3, et *Annales de Mathématiques* de Gergonne, tome XV); procédé qui a été perfectionné récemment par MM. Labbatie et Sarrus: l'équation M étant identique, a l'avantage de faire voir comment l'équation primitive $a=0$, se forme à l'aide de deux équations consécutives $a_p=0$, $a_{p+1}=0$, et des quotients q_1, q_2,... et des multiplicateurs l, l_1, l_2,... etc., qu'on a trouvés avant de parvenir à ces équations (*); 4°. la théorie des équations indéterminées à deux inconnues a et a_1 du premier degré, 5°. la théorie des suites où chaque terme est déterminé au moyen d'une échelle de relation à deux termes quelconques, et lorsque ces deux termes sont constants, la suite devient récurrente. 6°. Enfin la théorie des fonctions dont on fait usage dans le théorème de M. Sturm, lorsque $a'=0$ est l'équation dérivée de $a=0$; il suffit de prendre positivement toutes les quantités l à l'exception de l_1 et ~~de prendre~~ négativement toutes les quantités r, à l'exception de r_2.

14. Les équations (L) fournissent les deux ~~suivantes~~

$$\begin{aligned}(1.p\ldots lr) &= p(1.p-1\ldots lr) + l_{p-1}r_p(1.p-2\ldots lr),\\ (2.p\ldots lr) &= p(2.p-2\ldots lr) + l_{p-1}r_p(2.p-2\ldots lr),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}&(1.p\ldots lr)(2.p-1\ldots lr)-(1.p-1\ldots lr)(2.p\ldots lr)\\ &= l_{p-1}r_p[(1.p-2\ldots lr)(2.p-1\ldots lr)-(1.p-1\ldots lr)(2.p-2\ldots lr)]\\ &= l_1r_2l_2r_3l_3\ldots\ldots l_{p-1}r_p(-1)^p,\end{aligned}$$

or, en réduisant en fraction continue, à l'aide des équations M, la quantité $\frac{al}{a^1}$, on trouve pour l'expression d'uneréduite $\frac{(1.p\ldots lr)}{(2.p\ldots lr)}$.

(*) Elle peut même servir à l'ingénieuse méthode d'élimination de Kramp. (Gergonne, t. II).

Ainsi, quoiqu'on puisse développer une expression fractionnaire d'une infinité de manières, en fraction continue, il n'y a que celle où les quantités désignées par l et r, sont égales à l'unité, positive ou négative, qui fournisse des fractions convergentes irréductibles, et telles qu'entre deux de ces fractions, on ne peut en insérer aucune autre, de plus petite dénomination.

15. On ne croit pas inutile d'indiquer ici les principaux ouvrages qu'on peut consulter sur les fractions continues.

Wallis, *Arith. infinit.*, prop. 191.16...; origine de cette théorie.

id. Algèb., cap. 10, Oxon. 1683, anglice; éd. 1685; outre les fractions convergentes principales, on y donne les fractions accessoires; mais déjà auparavant Huygens avait indiqué les fractions principales comme moyen d'approximation des fractions à grands termes; voir de *Automato Planetario.*

Euler. *Opusc. Analy.*, t. II, p. 138, et t. I, p. 85, 1783—85.

id. Introduct. in Analy. infinit., cap. 13, 1748.

id. Nov. Comm. Petr., tom. IX et XI. (Anc. et nouv. Mémoires).

Bernouilli, *ibid.* tom. XX, de *Fract. conti.*, p. 10.

Lambert. *Hist. de l'Ac. de Berlin*, 1761, p. 265, voir Leg. *Él. de Géom.* Note 4.

Worselman de Heer. *Specimen inaugurale de fractionibus continuis; trajecti. ad. Rhenum*, 1833.

Gauss. *Comm. soc. Gotting.*, t. II, 1812.

Nouv. Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1776, p. 236.

Trembley. *ibid.* 1794, p. 126.

Nova acta Acad. Petr., 1784, p. 36.

Bret. *Annales de Mathém.*, par Gergonne, t. IX, 1818 et 1819.

Gergonne. *ibid.* t. IX.

Galois. *ibid.* t. XIX, 1828 et 1829.

M***. *ibid.* t. XIV, 1823.

Laplace. *Méc. Cél.*, t. IV, p. 254.

Legendre. *Théorie des fonct. ellipt.*, t. II, p. 508.

id. *Exercices du Cal. intégr.*, t. II.

Lagrange. *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1767 et 1768; il y développe la théorie des fractions accessoires.

id. *Addition à l'Algèbre d'Euler*, t. II, p. 379.

id. *Résol. des équat. num.*, ch. 4.

Gauss. *Disquis. Arith.*, p. 17, not., 1re édition.

Clausen. *Journal de Crell*, t. III, p. 88.

Moebius. *ibid.* t. VI, p. 226.

Jacobi. *ibid.* t. VII, p. 41.

Hill. *ibid.* t. VII, p. 48 — 50.

Stern. *ibid.* t. X et XI. Imprimé à part chez Reimer, à Berlin, en 1834, in-4°.

Stern. *ibid.*, t. XVIII, p. 69.

L'ouvrage de M. Stern cité ci-dessus, est le plus exact et le plus complet que l'on ait publié sur la matière; il contient des développements nouveaux fort intéressants: nous en avons extrait la notice bibliographique précédente.