JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TERQUEM

Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re^ série, tome 4 (1839), p. 175-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__175_0>

Sur le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique;

Par M. TERQUEM.

Théorème. Le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique de degré m est égal à $m^3 - m^2 + m$.

Démonstration. Soit

$$z^m + z^{m-1}p_1 + z^{m-2}p_2 + \ldots z^{m-n}p_n + \ldots + zp_{m-1} + p_m = 0, \quad (1)$$

l'équation d'une surface algébrique rapportée aux axes rectangulaires x, y, z; p_n est une fonction entière en x, y, du degré n; prenons pour origine le point donné. Les équations de la normale passant par l'origine, sont :

$$\left.\begin{aligned} x + z\frac{dz}{dx} &= 0, \\ y + z\frac{dz}{dy} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ces équations, chacune du degré m, combinées avec l'équation (1) du même degré, donnent une équation finale qui ne peut dépasser m^3; ainsi le nombre des normales ne peut dépasser m^3; mais cette équation renferme en outre $m^2 - m$ racines étrangères à la question. En effet, différentiant l'équation (1), successivement par rapport à x et z, et par rapport à y et z, on obtient

$$\begin{aligned} Qdz + Rdx &= 0, \\ Qdz + Sdy &= 0; \end{aligned}$$

Q, R, S, sont des fonctions entières en x, y, z: par-là les équations (2) deviennent

$$\left.\begin{aligned} Qx &= zR, \\ Qy &= zS. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Il est aisé de voir qu'en faisant $z = 0$, la fonction Q se réduit à ρ_{m-1} et le premier membre de l'équation (1) à ρ_m: donc en posant les équations

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ \rho_{m-1} &= 0, \\ \rho_m &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit $m(m-1)$, valeurs de x et y qui satisfont aux trois équations (1) et (3), ces valeurs correspondent à des points de la surface situés dans le plan xy et les parallèles à l'axe des z qui passent par ces points sont tangentes à la surface. Mais ces points sont étrangers à la question : donc le nombre des normales est $m^3 - m^2 + m$.

Observation I. L'équation du degré m^3 résultant de l'élimination entre les trois équations (1) et (3), outre les racines étrangères, peut avoir des racines imaginaires; ce qui dans des positions particulières du point donné peut réduire encore le nombre de normales possibles. Lorsque le point donné est un centre de courbure, l'équation renferme des racines égales.

Observation II. Le nombre de tangentes qu'on peut mener par un point donné à une surface algébrique, augmenté du nombre de tangentes qu'on peut mener à une ligne algébrique de même degré, est toujours égal au cube de ce degré.

Observation III. Dans les lignes algébriques, l'équation finale n'est pas compliquée de racines étrangères. De sorte que le nombre de normales qu'on peut mener par un point donné à une courbe de degré m est m^2.