JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. TERQUEM

Solution d'un Problème de combinaison

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 559-560.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__559_0>

Solution d'un Problème de combinaison ;

PAR M. O. TERQUEM.

Ce problème, qui a été proposé par M. Stern (*), peut être énonce de la manière suivante :

PROBLÈME. « Étant donnés les n nombres $1, 2, 3 \ldots n-1, n$; si » on les permute n à n, on aura $[n]$ permutations; ce symbole désigne » le produit résultant de la multiplication de tous ces nombres; quel » est le nombre total des *dérangements* qui se rencontrait dans ces $[n]$ » permutations ? »

Solution. Quand un nombre est suivi dans le même terme, *médiatement* ou *immédiatement*, d'un nombre plus petit que lui, on appelle cela un *dérangement*. C'est la définition de Cramer, telle qu'il la donne dans la belle règle qu'il a découverte, pour déterminer les signes des termes dans les formules générales relatives à la résolution des équations du 1[er] degré (*Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques*. Appendice, p. 658). Par exemple, le terme 321 renferme trois dérangements et 123 n'en a aucun. Soit donc y_n le nombre total des dérangements pour les n nombres : prenons en plus le nombre $n+1$ plus grand que tous les précédents, et soit y_{n+1} le nombre total des dérangements pour ces $n+1$ nombres; il s'agit de trouver une relation entre y_{n+1} et y_n; à cet effet, faisons parcourir au nombre $n+1$ les diverses positions qu'il peut occuper. En le plaçant à la gauche de tous les termes, il augmente évidemment chaque terme de n dérangements; en le plaçant entre le premier et le second nombre, il intro-

(*) *Journal de M. Crelle,* tome 18, p. 100, année 1838.

duit dans chaque terme $n-1$ nouveaux dérangements et ainsi de suite; dans la première position, le nombre des dérangements est donc $y_n + n[n]$; dans la seconde position, il est $y_n + (n-1)[n]$; dans la troisième position, $y_n + (n-2)[n]$, etc. Donc, on a

$$y_{n+1} = (n+1)y_n + \frac{n(n+1)}{2}[n] = (n+1)y_n + \frac{n}{2}[n+1]. \quad \text{(A)}$$

Cette équation donne celle-ci :

$$y_{n+2} = (n+2)y_{n+1} + \frac{n+1}{2}[n+2].$$

Des deux équations réunies, on déduit

$$y_{n+2} = (n+1)(n+2)y_n + \frac{2n+1}{2}[n+2]:$$

de même

$$y_{n+3} = (n+1)(n+2)(n+3)y_n + \frac{3n+3}{2}[n+3],$$

et en général,

$$y_{n+p} = (n+1)(n+2)\ldots(n+p)y_n + \frac{1}{2}\left[pn + \frac{p(p-1)}{2}\right][n+p].$$

Faisant $n=1$, on a $y_1 = 0$; donc

$$y_{p+1} = \frac{p(p+1)}{4}[p+1].$$

Changeant $p+1$ en n, on a enfin, pour le terme général,

$$y_n = \frac{n(n-1)}{4}[n]. \quad \text{C. Q. F. T.}$$