JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

TERQUEM

Démonstration d'un Théorème combinatoire de M. Stern

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 556-558.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__556_0>

Démonstration d'un Théorème combinatoire de M. Stern,

Par M. TERQUEM (*).

I. Soit le polynome $a+b+c+d+\ldots+r+s$, composé de n lettres; si l'on élève ce polynome à la puissance entière positive p, et qu'on remplace tous les coefficients par l'unité, on obtient ce que les géomètres allemands nomment une combinaison *avec répétition* de la classe p, des n *éléments* $a, b, c, \ldots s$; et ils désignent cette fonction par ce symbole C'^p_n, tandis qu'en ôtant l'accent, C^p_n désigne la somme des produits différents de n lettres combinées p à p, ou, comme disent les Allemands, la classe $p^{ième}$ de la combinaison *sans répétition* de n éléments.

Cela posé, le théorème de M. Stern est renfermé dans la formule suivante :

$$C'^p_n = C_n C'^{p-1}_n - C^2_n C'^{p-2}_n + C^3_n C'^{p-3}_n - C^4_n C'^{p-4}_n + \ldots \pm C^p_n, \quad \text{(A)}$$

II. En effaçant dans C'^p_n toutes les combinaisons qui renferment la lettre a, je désigne le reste par C'^p_{n-1}; effaçant dans ce dernier reste les combinaisons qui renferment b, je désigne le second reste par C'^p_{n-2}, et ainsi de suite. On a évidemment :

$$C'^p_{n-1} = C'^p_n - aC'^{p-1}_n, \qquad (1)$$
$$C'^p_{n-2} = C'^p_{n-1} - bC'^{p-1}_{n-1}; \qquad (2)$$

d'où l'on tire

$$C'^p_{n-2} = C'^p_n - aC'^{p-1}_n - bC'^{p-1}_{n-1}. \qquad (3)$$

Mais, l'équation (1) donne

$$C'^{p-1}_{n-1} = C'^{p-1}_n - aC'^{p-2}_n;$$

(*) *Journal de M. Crelle*, vol. 18, p. 375, année 1838.

donc l'équation (3) se change en celle-ci :

$$C'^{p}_{n-2} = C'^{p}_{n} - (a+b)C'^{p-1}_{n} + abC'^{p-2}_{n}, \qquad (4)$$

d'où l'on déduit

$$C'^{p}_{n-3} = C'^{p}_{n-1} - (b+c)C'^{p-1}_{n-1} + bcC'^{p-2}_{n-1}: \qquad (5)$$

l'équation (1) donne encore

$$C'^{p-2}_{n-1} = C'^{p-2} - aC'^{p-3}_{n};$$

donc l'équation (5) devient

$$C'^{p}_{n-3} = C'^{p}_{n} - (a+b+c)\,C'^{p-1}_{n} + (ab+ac+bc)\,C'^{p-2}_{n} - abcC'^{p-3}_{n}.$$

On a de même, ayant toujours égard à l'équation (1),

$$\begin{aligned}C'^{p}_{n-4} = C'^{p}_{n} &- (a+b+c+d)C'^{p-1}_{n} + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)C'^{p-2}_{n} \\ &- (abc+abd+acd+bcd)C'^{p-3}_{n} + abcdC'^{p-4}_{n}:\end{aligned}$$

la loi de formation est évidente; continuant ces déductions jusqu'à C'^{p}_{n-n} quantité qui est nulle, on a enfin

$$0 = C'^{p}_{n} - C^{1}_{n}C'^{p-1}_{n} + C^{2}_{n}C'^{p-2}_{n} - C^{3}_{n}C'^{p-3} + \ldots \pm C^{p}_{n},$$

formule qui est celle de M. Stern.

III. En donnant successivement à p toutes les valeurs comprises entre p et 1, on aura p équations du premier degré, soit qu'on les considère par rapport aux lettres accentuées ou aux lettres non accentuées. On peut donc exprimer chaque quantité de la première espèce, en fonction des autres de la seconde espèce *et vice versâ;* en d'autres termes, une classe combinatoire avec répétition peut s'exprimer en classes combinatoires sans répétition et réciproquement (I).

IV. Lorsque les éléments combinatoires a, b, c, $d \ldots s$ deviennent égaux à l'unité, la formule de M. Stern, donne une relation entre les nombres figurés : on a alors en général

$$C'^{q}_{n} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots n+q-1}{1.2.3\ldots q} = [n+q-1]^{q}\,[0]^{-q},$$

$$C^{q}_{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots n-q+1}{1.2.3\ldots q} = [n]^{q}\,[0]^{-q};$$

si l'on a $q > n$, C^q_n devient nul.

V. Considérant les n quantités $a, b, c, \ldots s$ comme les racines d'une équation de degré n, soient 1, A_1, A_2, A_3, etc., les coefficients à partir du premier terme; représentons C'^q_m par y_q qui n'est que la somme de toutes les fonctions symétriques des racines de degré q; et alors l'équation (A) peut s'écrire ainsi

$$y_p + A_1 y_{p-1} + A_2 y_{p-2} + \ldots + A_p = 0 \qquad \text{(B)}.$$

On voit donc que y_p est le terme général d'une série récurrente, dont les coefficients de l'équation sont l'échelle de relation. On sait que cette même échelle appartient aussi à la somme des puissances des racines.

P.-S. J'ajouterai ici quelques mots pour compléter la démonstration du deuxième théorème, énoncé pages 477-78 de ce volume : n devant être plus grand que 3, il s'ensuit que la démonstration ne s'étend pas au cas où $n=2$; mais il suffit de remarquer que quelle que soit la valeur de n, si $\cos \frac{4^q}{n}$ est irrationnel, $\cos \frac{4^q}{rn}$ est aussi irrationnel; or $\cos \frac{4^q}{8}$ est irrationnel, donc $\cos \frac{4^q}{8r}$ est aussi irrationnel, etc.

Le théorème cité peut être ainsi généralisé. Si un arc divisé par la circonférence donne un quotient rationnel qui ne soit ni $\frac{1}{6}$, ni $\frac{3}{6}$, ni $\frac{5}{6}$, la corde de cet arc divisée par le rayon donne une quotient irrationnel. De même, si une corde divisée par le rayon, donne un quotient rationnel qui ne soit ni 1, ni 2, l'arc soutendu par cette corde, divisé par la circonférence, donne un quotient irrationnel.