JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Suite du mémoire sur la classification des Transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 523-546.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__523_0>

SUITE DU MÉMOIRE

Sur la classification des Transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients;

PAR J. LIOUVILLE (*).

§ VI.

On prouve qu'il existe des fonctions finies explicites de toutes les espèces.

21. On peut demander si, quelque grand que soit le nombre entier positif m, il est toujours possible de trouver des transcendantes de $m^{ième}$ espèce. Pour répondre à cette question, il suffit de considérer les quantités successives $\log \log \log x$, $\log \log \log \log x$, etc. : car nous prouverons qu'elles sont respectivement de troisième, de quatrième espèce, etc., sans que jamais elles puissent s'abaisser.

Représentons par p la quantité $\log \log \ldots \log x$, et supposons que dans cette quantité il y ait un nombre $(m - 1)$ de signes logarithmiques placés les uns sur les autres. Dans les cas particuliers où l'on aurait $m = 2$ ou $m = 3$, la transcendante p serait de $(m - 1)^{ième}$ espèce, comme on l'a établi ci-dessus. Maintenant, quel que soit m, je dis que si p est une transcendante de $(m - 1)^{ième}$ espèce, $\log p$ sera une transcendante de $m^{ième}$ espèce. Ce théorème une fois démontré, la proposition que nous avons en vue dans ce paragraphe se trouvera démontrée aussi.

(*) *Voyez* tome II de ce Journal, page 56.

La fonction p étant de $(m-1)^{ième}$ espèce et de forme logarithmique, il est aisé de s'assurer que p' ou $\frac{dp}{dx}$ est d'espèce inférieure à la $(m-1)^{ième}$. D'après cela $\frac{p'}{p}$ ou la dérivée de $\log p$ est de $(m-1)^{ième}$ espèce. Donc $\log p$ est au moins de $(m-1)^{ième}$ espèce et au plus de $m^{ième}$ espèce. En d'autres termes $\log p$ peut jusqu'ici appartenir à la $(m-1)^{ième}$ ou à la $m^{ième}$ espèce. Pour prouver que ce second cas est celui qui a lieu, il suffit de faire voir que le premier est impossible.

Supposons donc $\log p$ exprimable par une fonction φ de $(m-1)^{ième}$ espèce, et prouvons que cette hypothèse conduit à une absurdité. Pour cela réduisons à son *minimum* le nombre total n des transcendantes ζ, η,... θ de $(m-1)^{ième}$ espèce contenues dans φ. On pourra toujours admettre que p est une des quantités ζ, η,.... θ. En effet, dans le cas contraire, l'équation

$$d\log p = d\varphi \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{p} = \varphi'$$

contiendra nécessairement dans son second membre une des transcendantes dont nous parlons puisque, si elles avaient toutes disparu, $\frac{p'}{p}$ serait exprimée par une fonction φ' d'espèce inférieure à la $(m-1)^{ième}$. L'équation $\frac{p'}{p} = \varphi'$ fournira donc la valeur de l'une des quantités ζ, η,... θ, de θ par exemple, en fonction algébrique de p, de sorte qu'en substituant sa valeur dans φ, la transcendante θ se trouvera remplacée par p sans que le nombre n ait augmenté. Pour mettre p en évidence nous écrirons

$$\log p = \varphi(x, p),$$

et en différenciant, il viendra

$$\frac{p'}{p} = \varphi'_x(x, p) + \varphi'_p(x, p)\frac{p'}{p}.$$

Le nombre n étant réduit à son *minimum*, cette équation doit être identique par rapport à p; on peut donc remplacer p par $\mu + p$, μ

étant une constante arbitraire, ce qui donne

$$\frac{p'}{\mu+p} = \varphi'_x(x, \mu+p) + \varphi'_p(x, \mu+p)\frac{p'}{\mu+p},$$

c'est-à-dire

$$d\log(\mu+p) = d\varphi(x, \mu+p).$$

En intégrant, on a

$$\log(\mu+p) = \varphi(x, \mu+p) + \log(\mu+a) - \varphi(b, \mu+a):$$

b désigne une valeur particulière quelconque de x et a la valeur correspondante de p. A présent je différencie par rapport à μ, et posant $\mu = 0$ après la différenciation, je trouve

$$\frac{1}{p} = \varphi'_p(x, p) + \frac{1}{a} - \varphi'_a(b, a).$$

Cette équation doit encore être identique par rapport à p et l'on peut y remplacer p par une indéterminée i. On a ainsi

$$\frac{1}{i} = \varphi'_i(x, i) + \frac{1}{a} - \varphi'_a(b, a),$$

équation qui, multipliée par di et intégrée, nous en donne une autre

$$\log i = \varphi(x, i) - \varphi(x, i_0) + \log i_0 + \left[\frac{1}{a} - \varphi'_a(b, a)\right](i - i_0),$$

dans laquelle i_0 est une valeur particulière de i, et qui doit être regardée comme absurde, puisqu'elle fournit pour $\log i$ une valeur algébrique en i. Donc on est conduit à une absurdité lorsqu'on suppose $\log p$ exprimable par une fonction finie explicite de $(m-1)^{ième}$ espèce: donc cette quantité $\log p$ est de $m^{ième}$ espèce, ce qu'il fallait démontrer.

§ VII.

Méthode pour résoudre une équation transcendante lorsque la racine de l'équation est exprimable en fonction finie explicite des coefficients.

22. Soit $T = 0$ une équation transcendante ayant pour premier membre une fonction finie T de l'inconnue y et d'un paramètre indéterminé x : si l'on cherche à résoudre cette équation pour en tirer la valeur de y en fonction de x, il pourra se présenter deux cas, suivant que la quantité y est ou n'est pas exprimable par une fonction finie explicite de x. Cela posé, le problème de la résolution des équations transcendantes en quantités finies explicites peut s'énoncer ainsi : Étant donnée l'équation $T = 0$, décider s'il est ou non possible d'y satisfaire par une valeur de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, et, si la réponse est affirmative, trouver la valeur de y.

La méthode que nous allons exposer pour résoudre ce problème est fondée sur un principe général semblable à celui dont nous avons fait usage dans les numéros précédents et surtout au § V; mais ce principe laisse subsister les difficultés particulières propres à chaque exemple. Dès lors, au lieu de présenter notre méthode d'une manière abstraite, nous croyons devoir l'exposer sur des équations choisies : les détails dans lesquels nous entrerons suffiront pour indiquer nettement la marche à suivre dans tout autre cas.

23. Considérons l'équation

$$(1) \qquad \log y = \frac{y}{x},$$

et cherchons s'il est possible de satisfaire à cette équation en prenant pour y une fonction finie explicite du paramètre indéterminé x.

D'après un théorème démontré n° 4, le logarithme d'une fonction algébrique n'est jamais égal à une autre fonction algébrique; ainsi on voit d'abord que la valeur de y ne peut pas être une fonction algébrique de x.

Supposons maintenant que y soit une fonction finie explicite de première espèce. Si l'on réduit à son *minimum* le nombre des transcendantes monomes contenues dans cette fonction, je dis qu'elle ne renfermera plus alors aucun logarithme. Car s'il en existe un (seul ou avec d'autres), désignons-le par $\log u$, u étant une fonction algébrique de x. En posant $\log u = \theta$, on aura

$$y = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ : dans cette fonction φ peuvent se trouver en outre, algébriquement aussi, d'autres transcendantes dont il est inutile de faire mention.

En remplaçant y par $\varphi(x, \theta)$ dans l'équation (1), il vient

$$\log \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x}$$

d'où l'on conclut, par la différenciation,

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}\left[\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}\right] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2}.$$

Cette dernière équation étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes monomes contenues dans $\varphi(x, \theta)$, on peut y mettre $\mu + \theta$ au lieu de θ, μ étant une constante indéterminée (*). On obtient aisément par là

$$d\log \varphi(x, \mu + \theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x}\right].$$

(*) Les lecteurs qui ont prêté quelque attention aux autres paragraphes de ce Mémoire doivent être accoutumés à nous voir remplacer la transcendante θ, dont nous nous occupons, par $\mu\theta$ ou par $\mu + \theta$, suivant que θ est une exponentielle ou un logarithme. La raison de cette différence tient à la nature même des équations différentielles qui servent à définir ces deux espèces de fonctions. La quantité $z = \log x$ dépend de l'équation différentielle $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$, dont l'intégrale complète est $z = \mu + \log x$, μ étant une constante arbitraire, tandis que si l'on pose $z = e^x$ on a l'équation différentielle $\frac{dz}{dx} = z$ dont l'intégrale complète est

En intégrant et nommant a la valeur de θ qui répond à une valeur b de x prise à volonté, on a ensuite

$$\log\varphi(x,\mu+\theta)=\frac{\varphi(x,\mu+\theta)}{x}+\log\varphi(b,\mu+a)-\frac{\varphi(b,\mu+a)}{b}.$$

Je différencie par rapport à μ l'équation que je viens d'écrire, et je pose $\mu=0$ après la différenciation, ce qui me donne

$$\frac{\varphi'_\theta(x,\theta)}{\varphi(x,\theta)}=\frac{\varphi'_\theta(x,\theta)}{x}+\frac{\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)}-\frac{\varphi'_a(b,a)}{b},$$

relation algébrique entre x, θ et les autres transcendantes monomes, dans laquelle je puis substituer à θ une indéterminée i. J'ai par conséquent

$$(2)\qquad \frac{\varphi'_i(x,i)}{\varphi(x,i)}=\frac{\varphi'(x,i)}{x}+\frac{\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)}-\frac{\varphi'_a(b,a)}{b},$$

équation que j'intègre par rapport à i et d'où je tire

$$(3)\qquad \log\varphi(x,i)=\frac{\varphi(x,i)}{x}+\left[\frac{\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)}-\frac{\varphi'_a(b,a)}{b}\right](i-i_0)$$
$$+\log\varphi(x,i_0)-\frac{\varphi(x,i_0)}{x},$$

$z=\mu e^x$. Aussi, lorsque $\theta=\log u$, la dérivée

$$\varphi'_x(x,\theta)+\varphi'_\theta(x,\theta)\frac{u'}{u}$$

de $\varphi(x,\theta)$ devient celle de $\varphi(x,\mu+\theta)$ par le changement de θ en $\mu+\theta$: elle ne deviendrait pas celle de $\varphi(x,\mu\theta)$ par le changement de θ en $\mu\theta$; car ce changement donne

$$\varphi'_x(x,\mu\theta)+\varphi'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\frac{u'}{u}$$

et non pas

$$\varphi'_x(x,\mu\theta)+\varphi'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\frac{\mu u'}{u}.$$

Au contraire, lorsque $\theta=e^u$, c'est en remplaçant θ par $\mu\theta$ que l'on transforme la dérivée de $\varphi(x,\theta)$ en dérivée de $\varphi(x,\mu\theta)$.

i_0 étant une valeur particulière quelconque de i. Or, l'équation (5) est absurde, puisque son second membre est une fonction algébrique de i qui ne peut pas être égale à $\log \varphi(x, i)$. Donc il est absurde d'admettre que l'expression de la racine y renferme un ou plusieurs logarithmes, tels que $\log u$.

24. L'expression de cette racine y ne contient pas non plus d'exponentielles. Soit en effet, s'il est possible, $\theta = e^u$ une exponentielle que l'on suppose devoir y entrer et $\varphi(x, \theta)$ la valeur même de y, u étant une fonction algébrique de x, et φ une fonction algébrique, tant par rapport à θ que par rapport aux autres exponentielles que nous ne mettons pas en évidence. Il faudra que l'on ait

$$\log \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x},$$

d'où résulte en différenciant

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}[\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2},$$

équation algébrique par rapport à x, θ, et par rapport aux autres exponentielles. On peut donc au lieu de θ écrire $\mu\theta$, μ étant une constante indéterminée. L'équation que l'on obtient ainsi revient à

$$d \log \varphi(x, \mu\theta) = d\, \frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x},$$

et en l'intégrant on en tire

$$\log \varphi(x, \mu\theta) = \frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x} + \log \varphi(b, \mu a) - \frac{\varphi(b, \mu a)}{b},$$

b étant une valeur particulière de x pour laquelle $\theta = a$.

Maintenant je différencie par rapport à μ et je pose $\mu = 1$ après la différenciation. Dans l'équation

$$\frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{x} + \frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{a\varphi'_a(b, a)}{b}$$

que cette opération produit, on a évidemment le droit de remplacer

θ par une indéterminée i, ce qui donne

$$(4)\qquad \frac{i\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i)} = \frac{i\varphi'_i(x, i)}{x} + \frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{a\varphi'_a(b, a)}{b},$$

et par suite,

$$\frac{\varphi'_i(x, i)\,di}{\varphi(x, i)} = \frac{\varphi'_i(x, i)\,di}{x} + \left[\frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{a\varphi'_a(b, a)}{b}\right]\frac{di}{i}.$$

En intégrant par rapport à i et déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière i_0 de i, on a donc

$$(5)\qquad \log\varphi(x, i) = \frac{\varphi(x,i)}{x} + \mathrm{A}(\log i - \log i_0) + \log\varphi(x, i_0) - \frac{\varphi(x,i_0)}{x}:$$

A représente la constante

$$\frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{a\varphi'_a(b, a)}{b}.$$

En mettant l'équation (5) sous la forme

$$\frac{\varphi(x, i)}{x} - \mathrm{A}\log i_0 + \log\varphi(x, i_0) - \frac{\varphi(x, i_0)}{x} = \log\varphi(x, i) - \mathrm{A}\log i,$$

on voit que son premier membre est une fonction algébrique de i qui ne peut se réduire à une simple constante, puisque i entre essentiellement dans $\varphi(x, i)$: le second membre ne renferme que des logarithmes : l'existence d'une telle équation est donc contraire au théorème du n° 19.

En regardant la racine y de l'équation (1) comme une fonction transcendante de première espèce, nous avons démontré 1°. que cette fonction ne renferme aucun logarithme ; 2°. qu'on arrive à une absurdité en y admettant des exponentielles. Il faut conclure de là que cette racine y ne peut avoir la forme en question. On prouvera par des raisonnements tout-à-fait semblables aux précédents que cette racine y ne peut pas non plus être exprimée par une fonction de seconde, de troisième espèce, etc., ou mieux on fera voir généralement que si la fonction y ne peut pas être de $n^{\text{ième}}$ espèce, elle ne pourra pas non plus être de $(n+1)^{ième}$ espèce : il suffira pour cela d'appliquer aux exponentielles de $(n+1)^{ième}$ espèce les raisonnements exposés ci-dessus dans le cas particulier où l'on suppose $n=0$. En un mot il est impossible de satisfaire à l'équation (1) en posant $y =$ *une fonction finie explicite de* x, ce qu'il fallait démontrer.

25. En remplaçant y par e^y dans l'équation (1), il vient

$$xy = e^y,$$

équation nouvelle qui ne pourra pas non plus être résolue par rapport à y en fonction finie explicite de x, mais dont la racine peut s'exprimer par une intégrale définie. Cette intégrale définie qui dépend de la variable x n'est donc pas réductible à la forme de fonction finie explicite de x.

Mais on peut résoudre au contraire l'équation

$$(6) \qquad \log y = \frac{y}{x} + \log\log x$$

qui diffère peu de l'équation (1) et à laquelle on satisfait en posant $y = x \log x$. Voyons comment cette valeur de y résulte de notre méthode.

D'abord y ne peut pas être une simple fonction algébrique de x. En effet l'équation (6) donnant

$$\log\log x = \log y - \frac{y}{x},$$

il s'ensuivrait que log log x pourrait s'exprimer par des transcendantes de première espèce, ce qui est absurde. Essayons donc de satisfaire à l'équation (1) par une valeur de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de première espèce.*

26. Outre la transcendante log x, cette fonction, en supposant qu'elle existe, pourra contenir d'autres transcendantes monomes, mais en réduisant le nombre de ces dernières à son *minimum*, nous serons certains qu'elles ne sont liées aux deux quantités x, $\log x$, et à des transcendantes d'espèce inférieure par aucune relation algébrique, de sorte que si nous tombons sur une relation de cette espèce, nous au-

rous le droit d'y remplacer les transcendantes dont il s'agit par de simples lettres indéterminées.

Cela posé, je dis que la valeur de y ne renferme aucune exponentielle. Car, dans le cas contraire, soit $\theta = e^u$ une des exponentielles que l'on suppose devoir y entrer, et suivant notre usage mettons-la en évidence en écrivant

$$y = \varphi(x, \theta).$$

Remplaçant y par $\varphi(x, \theta)$, l'équation (6) devient

$$\log \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x} + \log\log x,$$

d'où l'on tire par la différenciation

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}[\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2} + \frac{1}{x\log x},$$

équation algébrique par rapport à x, $\log x$, θ, etc., et dans laquelle on peut remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une indéterminée. L'équation que l'on obtient ainsi peut se metire sous la forme

$$d\log \varphi(x, \mu\theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x}\right] + d\log\log x,$$

et en l'intégrant on a

$$\log \varphi(x, \mu\theta) = \frac{\varphi(x, \mu\theta)}{x} + \log\log x + \log\varphi(b, \mu a) - \frac{\varphi(b, \mu a)}{b} - \log\log b,$$

b étant une valeur particulière quelconque de x et a la valeur correspondante de θ.

Maintenant je différencie, par rapport à μ, et je pose $\mu = 1$ après la différenciation. Dans l'équation

$$\frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{x} + \frac{a\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{a\varphi'_a(b, a)}{b}$$

que cette opération produit, nous avons évidemment le droit de remplacer θ par une indéterminée i. Or ce changement conduit à une équation toute semblable à l'équation (4) que nous avons vue être impossible, n° 24. La valeur de y ne renferme donc aucune exponentielle.

27. Elle ne peut pas non plus contenir de logarithmes de la forme $\theta = \log u$, mais essentiellement différents de $\log x$. Adoptons en effet l'hypothèse contraire, et pour mettre θ en évidence posons $y = \varphi(x, \theta)$. Il nous viendra, en vertu de l'équation (6),

$$\log \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, \theta)}{x} + \log \log x,$$

d'où l'on tire par la différenciation

$$\frac{\varphi_x'(x, \theta) + \varphi_\theta'(x, \theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}\left[\varphi_x'(x, \theta) + \varphi_\theta'(x, \theta)\frac{u'}{u}\right] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2} + \frac{1}{x \log x}.$$

L'équation que je viens d'écrire étant algébrique par rapport à x, $\log x$, et par rapport aux logarithmes θ, etc., qui sont irréductibles avec $\log x$, on peut y remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire. Le résultat que l'on obtient ainsi peut se mettre sous la forme

$$d \log \varphi(x, \mu + \theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x}\right] + d \log \log x,$$

et l'on a en intégrant

$$\log \varphi(x, \mu + \theta) = \frac{\varphi(x, \mu + \theta)}{x} + \log \log x + \log \varphi(b, \mu + a) - \frac{\varphi(b, \mu + a)}{b} - \log \log b,$$

b étant une valeur particulière quelconque de x, et a la valeur correspondante de θ.

Or, si l'on différencie par rapport à μ l'équation précédente, et si, après avoir posé $\mu = 0$, l'on remplace θ par une indéterminée i, comme on a droit de le faire, l'équation nouvelle à laquelle ces opérations conduiront sera toute semblable à l'équation (2) du n° 23 et par conséquent ne pourra pas subsister. Ainsi $\log x$ est la seule transcendante qui puisse entrer dans la valeur de y réduite à sa forme la plus simple.

28. Cela étant, posons $\log x = \theta$ et $y = \varphi(x, \theta)$, φ désignant une fonction algébrique des deux quantités x, θ. L'équation (6) différenciée nous fournira

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x \log x},$$

ou

$$(7) \qquad \frac{\varphi'_x(x, \theta) + \frac{1}{x}\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{1}{x}\left[\varphi'_x(x, \theta) + \frac{1}{x}\varphi'_\theta(x, \theta)\right] - \frac{\varphi(x, \theta)}{x^2} + \frac{1}{x\theta}.$$

Remplaçons θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire; nous aurons sans difficulté

$$d\log\varphi(x, \mu+\theta) = d\left[\frac{\varphi(x, \mu+\theta)}{x}\right] + d\log(\mu+\theta).$$

En intégrant et nommant b, a deux valeurs correspondantes de x et de θ, il vient donc

$$\begin{aligned}\log\varphi(x, \mu+\theta) = \frac{\varphi(x, \mu+\theta)}{x} + \log(\mu+\theta) + \log\varphi(b, \mu+a)\\ - \frac{\varphi(b, \mu+a)}{b} - \log(\mu+a).\end{aligned}$$

Je différencie cette équation nouvelle par rapport à μ, après quoi je pose $\mu = 0$, puis je remplace θ par une indéterminée i. Je trouve de la sorte

$$(8) \qquad \frac{\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i)} = \frac{\varphi'_i(x, i)}{x} + \frac{1}{i} + m,$$

en faisant pour abréger

$$\frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} - \frac{\varphi'_a(b, a)}{b} - \frac{1}{a} = m.$$

L'équation (8) où l'on doit prendre i pour variable indépendante est une équation différentielle du premier ordre, et il s'agit d'y satisfaire par une intégrale algébrique, car $\varphi(x, i)$ est une fonction algébrique de i. Or en multipliant ses deux membres par di et intégrant, on a

$$\log\varphi(x,\ i) = \frac{1}{x}\varphi(x,\ i) + \log i + mi + \text{constante},$$

ou

$$\log\left[\frac{\varphi(x,\ i)}{i}\right] = \frac{1}{x}\varphi(x,\ i) + mi + \text{const.},$$

équation dont les deux membres se présentent l'un sous une forme algébrique, l'autre sous une forme logarithmique, ce qui exige que chacun d'eux soit indépendant de i. On a donc nécessairement $\varphi(x,\ i) = \lambda i$, λ étant indépendant de i; et par conséquent $\varphi(x,\theta) = \lambda\theta$, $\varphi'_\theta(x,\ \theta) = \lambda$, $\varphi'_x(x,\ \theta) = \theta\frac{d\lambda}{dx}$. Ces valeurs substituées dans la différentielle de l'équation (6), c'est-à-dire dans l'équation (7) dont on s'est servi tout-à-l'heure, nous donnent

$$\frac{d\lambda}{\lambda dx} + \frac{1}{x\theta} = \frac{1}{x}\left(\theta\frac{d\lambda}{dx} + \frac{\lambda}{x}\right) - \frac{\lambda\theta}{x^2} + \frac{1}{x\theta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\lambda}{\lambda dx} - \frac{\lambda}{x^2} = \theta\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{d\lambda}{dx} - \frac{\lambda}{x^2}\right).$$

Or θ étant un logarithme et λ étant comme $\varphi(x,\ i)$ une fonction algébrique de x, cette équation ne peut subsister que si l'on a à la fois

$$\frac{d\lambda}{\lambda dx} = \frac{\lambda}{x^2},\ \frac{1}{x}\cdot\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda}{x^2},\quad \text{d'où}\quad \lambda = x.$$

La seule valeur possible de y est donc $x\log x$: l'équation $y = x\log x$ satisfait à l'équation $\frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x\log x}$, qui est la différentielle de l'équation (6); elle en est donc une intégrale particulière, tout aussi bien que l'équation (6); de plus en posant $x=e$, elle donne $y=e$, ce qui s'accorde aussi avec ce que fournit l'équation (6) : donc cette équation (6) est nécessairement vérifiée quand on pose $y = x\log x$; de sorte que nous en avons, comme nous le voulions, trouvé la racine par une méthode directe.

29. Désignons par $F(x, y)$ une fonction algébrique de x, y, et considérons l'équation

$$(9) \qquad \log y = F(x, y),$$

dans laquelle l'équation (1) est comprise comme cas particulier : nous supposons que $F(x, y)$ dépend de x et de y, en sorte que des deux dérivées $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, aucune n'est identiquement nulle; nous supposons de plus que pour aucune valeur déterminée b de y, $F(x, y)$ ne se réduit à une simple constante égale à $\log b$ (*). Cela étant, on démontre qu'il est impossible d'exprimer la racine y de l'équation (9) par une fonction finie explicite de x.

Comme il est d'abord évident que cette racine n'est pas algébrique, admettons qu'on puisse satisfaire à l'équation (9) en prenant pour y une fonction de $n^{ième}$ espèce : réduisons à leur *minimum* le nombre total des transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce que cette fonction renferme, et soit $\theta = e^u$ une des exponentielles de $n^{ième}$ espèce que l'on suppose devoir y entrer : enfin pour mettre θ en évidence, écrivons

$$y = \varphi(x, \theta).$$

L'équation (9) nous donnera

$$\log \varphi(x, \theta) = F[x, \varphi(x, \theta)],$$

et par suite

$$d\log \varphi(x, \theta) = dF[x, \varphi(x, \theta)].$$

Or si l'on développe les différenciations indiquées en ayant soin de remplacer $d\theta$ par $\theta u'dx$, on tombera sur une équation algébrique par rapport à toutes les transcendantes de $n^{ième}$ espèce et dans laquelle on pourra remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante arbitraire. Le

---

(*) Si $F(x, y)$ se réduisait à une fonction $F(x)$ de x seule, on aurait $y = e^{F(x)}$. Si $F(x, y)$ se réduisait à une fonction de y seule, la valeur de y fournie par l'équation (9) serait purement numérique et cesserait de dépendre de x. Enfin si, pour une valeur particulière b de y, $F(x, y)$ était égale à $\log b$, l'équation (9) serait satisfaite en posant $y = b$.

résultat qu'on obtient en opérant ainsi peut se mettre sous la forme

$$d \log \varphi(x, \mu\theta) = d\mathrm{F}[x, \varphi(x, \mu\theta)];$$

c'est ce dont on s'assure aisément en effectuant le calcul, et ce qui cesserait d'être vrai si θ représentait un logarithme au lieu d'une exponentielle.

En intégrant et nommant a la valeur de θ qui répond à $x = b$, on aura donc

$$\log \varphi(x, \mu\theta) = \mathrm{F}[x, \varphi(x, \mu\theta)] + \log \varphi(b, \mu a) - \mathrm{F}[b, \varphi(b, \mu a)].$$

Je différencie cette équation par rapport à μ, après quoi je fais $\mu = 1$ et je remplace θ par une indéterminée i. Si, pour abréger, je pose $\varphi(x, i) = z$, le résultat final que j'obtiendrai sera de la forme

$$(10) \qquad \frac{idz}{zdi} = \mathrm{F}'_z(x, z) \frac{idz}{di} + m,$$

m désignant une certaine quantité, indépendante de x et de i, dont il est inutile d'écrire ici la valeur. L'équation (10), dans laquelle on prend i pour variable, est différentielle du premier ordre, et il s'agit d'y satisfaire par une valeur de z algébrique en i. Mais si l'on multiplie ses deux membres par $\frac{di}{i}$, qu'on intègre, et qu'on désigne par i_0 une valeur particulière quelconque de i, on aura

$$\log\left(\frac{z}{z_0}\right) = \mathrm{F}(x, z) + m \log\left(\frac{i}{i_0}\right) - \mathrm{F}(x, z_0),$$

z_0 étant ce que devient z quand on pose $i = i_0$. De là on conclut

$$\mathrm{F}(x, z) - \mathrm{F}(x, z_0) = \log\left(\frac{z}{z_0}\right) - m \log\left(\frac{i}{i_0}\right),$$

équation dont l'absurdité devient manifeste si l'on observe que z contient i et se trouve essentiellement contenu dans $\mathrm{F}(x, z)$, en sorte que le premier membre est une fonction algébrique de i qui ne se réduit pas à une simple constante.

Donc la valeur de y ne renferme aucune exponentielle de $n^{\text{ième}}$ espèce : cette conclusion cesserait d'être exacte si la dérivée $\mathrm{F}'_y(x, y)$

était identiquement nulle; en effet on aurait alors

$$F(x, z) - F(x, z_0) = 0;$$

mais nous avons expressément exclu ce cas particulier.

30. Maintenant soit $\theta = \log u$ un des logarithmes de $n^{ième}$ espèce entrant dans la valeur de y, et posons

$$y = \varphi(x, \theta).$$

L'équation (9) nous donnera

$$\log \varphi(x, \theta) = F[x, \varphi(x, \theta)],$$

ou

$$d \log \varphi(x, \theta) = dF[x, \varphi(x, \theta)],$$

et l'on en conclura sans difficulté

$$d \log \varphi(x, \mu + \theta) = dF[x, \varphi(x, \mu + \theta)],$$

μ désignant une constante arbitraire. En intégrant et nommant b, a deux valeurs de x, θ qui se correspondent, on obtient

$$\log \varphi(x, \mu+\theta) = F[x, \varphi(x, \mu+\theta)] + \log \varphi(b, \mu+a) - F[b, \varphi(b, \mu+a)].$$

Je différentie cette équation par rapport à μ, je pose $\mu = 0$, puis je remplace θ par une indéterminée i: en faisant $\varphi(x, i) = z$ et désignant par m une certaine quantité indépendante de x et de i, je trouve

$$(11) \qquad \frac{dz}{zdi} = F'_z(x, z) \frac{dz}{di} + m.$$

L'équation (11), en prenant i pour variable indépendante, est différentielle du premier ordre, et il s'agit d'y satisfaire par une valeur de z algébrique en i. Mais cela est impossible, car en intégrant on a cette équation

$$\log z = F(x, z) + m(i - i_0) - F(x, z_0) + \log z_0,$$

où z_0 désigne la valeur de z correspondante à $i = i_0$, et qui est absurde puisqu'elle donne le logarithme de z ou de $\varphi(x, i)$ en fonction algébrique de i.

Ainsi la valeur de y que l'on a supposée de $n^{ième}$ espèce ne peut contenir ni logarithme ni exponentielle de $n^{ième}$ espèce : donc il est impossible de l'exprimer par aucune fonction finie explicite de x.

31. Ce théorème est applicable à une question de Mécanique Céleste. En effet, désignons par h l'excentricité de l'orbite elliptique d'une planète, par x l'anomalie moyenne et par z l'anomalie excentrique. L'équation qui donne z en fonction de x sera, comme on sait,

$$(12) \qquad x = z - h \sin z.$$

En observant que

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

cette équation devient

$$x = z - \frac{h}{2\sqrt{-1}}\left(e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}\right).$$

En faisant $e^{z\sqrt{-1}} = y$, on aura donc

$$x = \frac{\log y}{\sqrt{-1}} - \frac{h}{2\sqrt{-1}}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

c'est-à-dire

$$\log y = x\sqrt{-1} + \frac{h}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Or cette dernière équation est de même forme que l'équation (9), et par conséquent n'est pas résoluble en fonction finie explicite de x : donc l'équation (12) n'est pas non plus résoluble de cette manière. Toutefois le cas où h est nulle fait exception; la valeur de z est alors simplement égale à x. En prenant x égale à un nombre déterminé différent de zéro, et regardant h comme variable, on verra de même que z n'est pas fonction finie explicite de h.

32. Enfin soit proposé de trouver la racine y de l'équation

$$(13) \qquad e^y \log x = (xy - x^2)e^x.$$

Comme on en tire

$$\log x = (xy - x^2)e^{x-y},$$

et que $\log x$ ne peut pas s'exprimer sous forme finie à l'aide des seuls signes algébriques et exponentiels, il faut en conclure que la racine cherchée n'est pas algébrique. Voyons si elle est exprimable par une fonction finie explicite de première espèce. Cette fonction pourra renfermer, outre $\log x$, d'autres transcendantes monomes : réduisons le nombre de ces dernières à son *minimum*, de sorte qu'il n'existe entre elles et les deux quantités x, $\log x$, aucune relation algébrique; dès-lors il nous sera facile de démontrer qu'aucune des transcendantes dont nous parlons n'est de la forme e^u, u étant algébrique.

En effet, dans le cas contraire, posons $e^u = \theta$, et pour mettre θ en évidence, écrivons

$$y = \varphi(x, \theta).$$

L'équation (13) nous donnera

$$e^{\varphi(x, \theta)} \log x = [x\varphi(x, \theta) - x^2]\, e^x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.[e^{\varphi(x, \theta)}.\log x]}{e^{\varphi(x, \theta)}.\log x} = \frac{d.[x\varphi(x, \theta) - x^2]\, e^x}{[x\varphi(x, \theta) - x^2]\, e^x}.$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées, les exponentielles e^x, $e^{\varphi(x, \theta)}$ disparaîtront d'elles-mêmes, et l'équation que l'on obtiendra sera algébrique par rapport à x, $\log x$, θ, etc., de sorte qu'on pourra y remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une constante indéterminée. D'après cela on trouve sans peine que

$$\frac{d.[e^{\varphi(x, \mu\theta)}.\log x]}{e^{\varphi(x, \mu\theta)}.\log x} = \frac{d.[x\varphi(x, \mu\theta) - x^2]\, e^x}{[x\varphi(x, \mu\theta) - x^2]\, e^x}:$$

par suite, en intégrant, il vient

$$(14) \qquad e^{\varphi(x, \mu\theta)}.\log x = \mathrm{C}[x\varphi(x, \mu\theta) - x^2]\, e^x;$$

C est une constante arbitraire; pour la déterminer on désignera par a la valeur de θ qui répond à une valeur particulière quelconque de x représentée par b, et l'on aura

$$C = \frac{e^{\varphi(b, \mu a)} . \log b}{[b\varphi(b, \mu a) - b^2]e^b}.$$

Maintenant je différentie l'équation (14) par rapport à μ, et je pose $\mu = 1$ après la différentiation. En nommant m, n, ce que deviennent les deux quantités C, $\frac{dC}{d\mu}$, pour $\mu = 1$, j'obtiens

$$(15)\quad e^{\varphi(x, \theta)}.\theta\varphi'_\theta(x, \theta).\log x = mx\theta\varphi'_\theta(x, \theta)e^x + n[x\varphi(x, \theta) - x^2]e^x.$$

Mais en faisant $\mu = 1$, l'équation (14) donne

$$(16)\quad e^{\varphi(x, \theta)}.\log x = m[x\varphi(x, \theta) - x^2]e^x$$

L'équation (16) rapprochée de l'équation

$$e^{\varphi(x, \theta)}.\log x = [x\varphi(x, \theta) - x^2]e^x,$$

nous montre que $m = 1$.

Divisant les deux équations (15) et (16), membre à membre, on élimine $e^{\varphi(x, \theta)}$, et l'on trouve, après avoir posé $m = 1$,

$$\theta\varphi'_\theta(x, \theta) = \frac{\theta\varphi'_\theta(x, \theta)}{\varphi(x, \theta) - x} + n,$$

relation algébrique entre x, θ et les autres transcendantes contenues dans $\varphi(x, \theta)$, de sorte qu'on peut y remplacer θ par une indéterminée i. On a ainsi

$$i\varphi'_i(x, i) = \frac{i\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i) - x} + n,$$

ou bien, en multipliant par $\frac{di}{i}$,

$$\varphi'_i(x, i)\,di = \frac{\varphi'_i(x, i)\,di}{\varphi(x, i) - x} + \frac{ndi}{i}.$$

Intégrant et désignant par i_0 une valeur particulière quelconque de i, on obtient ensuite

$$\varphi(x,\ i) - \varphi(x,\ i_0) = \log\left(\frac{\varphi(x,\ i) - x}{\varphi(x,\ i_0) - x}\right) + n\log\left(\frac{i}{i_0}\right),$$

équation absurde, puisque le premier membre est algébrique en i et ne peut se réduire à une simple constante tant que la fonction $\varphi(x,i)$ n'est pas supposée indépendante de i. Il est prouvé par là que la valeur cherchée de y ne peut contenir aucune exponentielle.

33. Si l'on représente par $\log u$ un logarithme essentiellement différent de $\log x$, la valeur de y ne pourra pas non plus contenir $\log u$; en effet si $\log u$ entrait dans l'expression de y, on le mettrait en évidence en écrivant

$$\log u = \theta,\quad y = \varphi(x,\ \theta).$$

Par suite, l'équation (13) nous donnerait

$$e^{\varphi(x,\ \theta)}.\log x = [x\varphi(x,\ \theta) - x^2]\,e^x,$$

puis

$$\frac{d\left[e^{\varphi(x,\ \theta)}.\log x\right]}{e^{\varphi(x,\ \theta)}.\log x} = \frac{d.[x\varphi(x,\ \theta) - x^2]\,e^x}{[x\varphi(x,\ \theta) - x^2]\,e^x}.$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées, les exponentielles e^x, $e^{\varphi(x,\ \theta)}$ disparaîtront d'elles-mêmes, et l'on aura le droit de remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante indéterminée. D'après cela on prouve aisément que

$$\frac{d\left[e^{\varphi(x,\ \mu+\theta)}.\log x\right]}{e^{\varphi(x,\ \mu+\theta)}.\log x} = \frac{d.[x\varphi(x,\ \mu+\theta) - x^2]\,e^x}{[x\varphi(x,\ \mu+\theta) - x^2]\,e^x};$$

par conséquent en intégrant il vient

$$(17)\qquad e^{\varphi(x,\ \mu+\theta)}.\log x = \mathrm{C}\,[x\varphi(x,\ \mu+\theta) - x^2]\,e^x:$$

C désigne une constante arbitraire que l'on déterminera en attribuant à x une valeur particulière quelconque.

Différencions l'équation (17) par rapport à μ, posons $\mu = 0$ après la différentiation, et nommons m, n les valeurs de C et $\frac{dC}{d\mu}$ pour $\mu = 0$: nous aurons

$$(18)\quad e^{\varphi(x,\,\theta)}.\varphi'_\theta(x,\theta)\log x = mx\varphi'_\theta(x,\theta)e^x + n[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x.$$

Mais quand $\mu = 0$, l'équation (17) devient

$$(19)\qquad e^{\varphi(x,\,\theta)}.\log x = m[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x.$$

L'équation (19) rapprochée de l'équation

$$e^{\varphi(x,\,\theta)}.\log x = [x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x,$$

nous montre que $m = 1$.

Divisant les équations (18), (19) membre à membre, on élimine $e^{\varphi(x,\,\theta)}$, et l'on trouve

$$\varphi'_\theta(x,\theta) = \frac{\varphi'_\theta(x,\theta)}{\varphi(x,\theta) - x} + n.$$

Dans cette équation qui est algébrique par rapport à x, θ et par rapport aux autres transcendantes contenues dans $\varphi(x,\theta)$, on peut remplacer θ par une indéterminée i, ce qui donne

$$\varphi'_i(x,i) = \frac{\varphi'_i(x,i)}{\varphi(x,i) - x} + n.$$

Multipliant donc par di et intégrant, on obtient l'équation nouvelle $\log[\varphi(x,i) - x] = \varphi(x,i) - \varphi(x,i_0) + n(i_0 - i) + \log[\varphi(x,i_0) - x]$, où i_0 représente une valeur particulière quelconque de i, et qui est absurde puisqu'elle fournit pour $\log[\varphi(x,i) - x]$ une valeur algébrique en i. Donc si la racine y de l'équation (13) est exprimable par une fonction transcendante de première espèce, cette fonction ne contiendra qu'un seul logarithme, savoir $\log x$.

34. Cela étant, posons $\log x = \theta$, et $y = \varphi(x,\theta)$, la fonction φ étant algébrique par rapport à x et θ. L'équation (13), savoir

$$(13)\qquad e^y\log x = (xy - x^2)e^x,$$

de laquelle on déduit aisément

$$(20)\qquad \frac{d(e^y \log x)}{e^y \log x} = \frac{d.(xy - x^2)e^x}{(xy - x^2)e^x},$$

nous donnera

$$(21)\qquad \frac{d.\left[e^{\varphi(x,\theta)}.\theta\right]}{e^{\varphi(x,\theta)}.\theta} = \frac{d.[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x}{[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x},$$

équation de laquelle e^x et $e^{\varphi(x,\theta)}$ disparaîtront après les différentiations effectuées. La transcendante θ restant seule alors, on pourra remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante arbitraire. Le résultat qu'on obtiendra ainsi pourra se mettre sous la forme

$$(22)\qquad \frac{d.\left[e^{\varphi(x,\mu+\theta)}.(\mu+\theta)\right]}{e^{\varphi(x,\mu+\theta)}.(\mu+\theta)} = \frac{d.[x\varphi(x,\mu+\theta) - x^2]e^x}{[x\varphi(x,\mu+\theta) - x^2]e^x},$$

de sorte qu'en intégrant il vient

$$(23)\qquad e^{\varphi(x,\mu+\theta)}.(\mu+\theta) = \mathrm{C}[x\varphi(x,\mu+\theta) - x^2]e^x :$$

C désigne une constante que l'on déterminera, si l'on veut, en attribuant à x une valeur particulière.

Maintenant je différentie par rapport à μ l'équation (23) et je pose $\mu = 0$ après la différentiation. En désignant par m, n les valeurs de C et $\frac{d\mathrm{C}}{d\mu}$ pour $\mu = 0$, j'obtiens

$$(24)\qquad e^{\varphi(x,\theta)}[1+\theta\varphi'_\theta(x,\theta)] = mx\varphi'_\theta(x,\theta)e^x + n[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x.$$

Mais en faisant $\mu = 0$ l'équation (23) fournit

$$(25)\qquad e^{\varphi(x,\theta)}.\theta = m[x\varphi(x,\theta) - x^2]e^x.$$

Cette équation rapprochée de l'équation (13) et des équations $\log x = \theta$, $y = \varphi(x,\theta)$ nous montre que $m = 1$.

Si donc on divise membre à membre les équations (24) et (25), on aura

$$\frac{1+\theta\varphi'_\theta(x,\theta)}{\theta} = \frac{\varphi'_\theta(x,\theta)}{\varphi(x,\theta)-x} + n,$$

ce qui, en remplaçant, comme on en a le droit, θ par une indéterminée i, nous fournira

$$\frac{1+i\varphi'_i(x,\ i)}{i} = \frac{\varphi'_i(x,\ i)}{\varphi(x,\ i)-x} + n.$$

En prenant i pour variable indépendante, l'équation que je viens d'écrire est différentielle du premier ordre, et il s'agit d'en trouver, s'il est possible, une intégrale algébrique. Multipliant par di et intégrant, on en tire

$$\log\left(\frac{i}{i_0}\right) + \varphi(x,\ i) - \varphi(x,i_0) = \log\left(\frac{\varphi(x,\ i)-x}{\varphi(x,\ i_0)-x}\right) + n(i-i_0),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(x,\ i) - \varphi(x,\ i_0) - n(i-i_0) = \log\left(\frac{\varphi(x,\ i)-x}{\varphi(x,\ i_0)-x}\right) - \log\left(\frac{i}{i_0}\right);$$

Or, $\varphi(x, i)$ étant algébrique par rapport à i, cette dernière équation ne peut subsister sans que son premier membre se réduise à une simple quantité constante ou fonction de x, mais indépendante de i. En désignant par λ une fonction de x seule, on voit donc que $\varphi(x,\ i)$ ne peut être que de la forme

$$\varphi(x,\ i) = ni + \lambda,$$

et l'on doit observer que $\varphi(x, i)$ étant algébrique en x, λ est aussi une fonction algébrique de cette variable. A présent, si l'on fait $i=\theta$, il vient

$$\varphi(x,\ \theta) = n\theta + \lambda.$$

Je remplace $\varphi(x,\ \theta)$ par sa valeur dans l'équation (21), et comme on a $d\theta = d\log x = \frac{dx}{x}$, je trouve, tout calcul fait,

$$(26) \qquad \lambda' + \frac{n}{x} - 1 = \frac{x\lambda' + n - 2x + n\theta + \lambda}{nx\theta + x\lambda - x^2} - \frac{1}{x\theta}:$$

λ' représente la dérivée de λ.

L'équation (26) étant algébrique par rapport à x et θ doit subsister encore si l'on remplace θ par une indéterminée i. Mais en chassant les dénominateurs, elle prend la forme

$$P\theta^2 + Q\theta + R = 0.$$

Par suite on doit avoir séparément $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Or $R = x^2 - x\lambda$; il faut donc que l'on ait d'abord $\lambda = x$, moyennant quoi l'équation (26) se réduit à $n = 1$.

35. Il suit de là qu'en posant $\varphi(x, \theta) = \theta + \lambda = \log x + x$, on satisfait à l'équation (21); cela revient à dire que l'équation

$$y = \log x + x$$

est une intégrale particulière de l'équation différentielle du premier ordre

$$(20) \qquad \frac{d(e^y \log x)}{e^y \log x} = \frac{d.(xy - x^2)e^x}{(xy - x^2)e^x}:$$

elle partage cette propriété avec l'équation (13). Par conséquent pour que $\log x + x$ soit racine de l'équation (13), il faut et il suffit que la quantité $\log x + x$ et la racine y de cette équation (13) soient égales entre elles pour une valeur particulière de x, telle que $x = 1$, ce qui a lieu en effet. Donc enfin on vérifie l'équation (13) en posant $y = \log x + x$, ce dont on s'assure du reste très facilement *à posteriori*.

Quoique j'aie abrégé certains raisonnements qui doivent être devenus très familiers au lecteur, on trouvera sans doute ce dernier exemple un peu long. Mais j'ai du moins lieu de croire qu'il suffira pour bien faire comprendre l'esprit de la méthode que j'ai suivie dans ce Mémoire.