JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUG. MIQUEL

Théorèmes sur les intersections des cercles et des sphères

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 517-522.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__517_0>

THÉORÈMES

Sur les intersections des cercles et des sphères;

PAR AUG. MIQUEL.

THÉORÈME I.

« Lorsque quatre points A, B, C, D (fig. 1, planche III) sont situés
» sur une même circonférence de cercle ABCD; si par les points
» consécutifs A et B, B et C, C et D, D et A, on fait passer des
» circonférences de cercle, les quatre secondes intersections A′, B′,
» C′, D′ des circonférences consécutives se trouveront sur une même
» circonférence de cercle A′B′C′D′. »

En effet, joignant AB, BC, CD, DA, A′B′, B′C′, C′D′, D′A′, AA′, BB′, CC′, DD′, on aura

$$A'AB = 2d - A'B'B, \qquad C'CB = 2d - C'B'B;$$

et par conséquent,

$$A'AB + C'CB = A'B'C'.$$

On obtiendrait de la même manière

$$A'AD + C'CD = A'D'C'.$$

En ajoutant terme à terme les deux égalités précédentes, il vient

$$BAD + DCB = C'B'A' + A'D'C'.$$

Or, on a

$$BAD + DCB = 2d.$$

Donc on aura

$$C'B'A' + A'D'C' = 2d\,;$$

ce qui nous apprend que les points A′, B′, C′, D′, sont situés sur une même circonférence de cercle.

Réciproque évidente. « Lorsque trois points C, B′, D′ sont situés » respectivement sur chacun des côtés d'un triangle curviligne DBA′ » formé par trois arcs de cercle DB, BA′, A′D qui se coupent tous » trois à un même point A ; si on fait passer une circonférence de » cercle par chacun des sommets de ce triangle, et par les deux des » trois points C, B′, D′, qui se trouvent sur les deux côtés qui abou- » tissent à ce sommet, les trois circonférences D′DC, CBB′, B′A′D′, » ainsi obtenues, se couperont en même point C′. »

Nota. Dans ce qui suit, il nous arrivera de désigner une circonférence de cercle par trois des points par lesquels elle passerait si elle était décrite ; et une sphère par quatre points de sa surface.

Théorème II.

» Lorsqu'un quadrilatère complet curviligne ABCDEF est (*fig.* 2) » formé par quatre arcs de cercle AB, BC, CD, DA, qui se coupent » tous quatre en un même point P, si l'on circonscrit des circonférences » de cercle à chacun des quatre triangles curvilignes que forment » les côtés de ce quadrilatère, les circonférences de cercle AFB, » EBC, DCF, DAE ainsi obtenues se couperont toutes quatre en un » même point G. »

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que trois quelconques AFB, EBC, DCF de ces quatre circonférences se coupent en un même point. Or, d'après la réciproque précédente, puisque les trois points B, C, F sont situés respectivement sur chacun des côtés du triangle curviligne AED formé par trois arcs de cercle qui se coupent en un même point P, les circonférences AFB, EAC, DCF, se coupent toutes trois en un certain point G. Donc les quatre circonférences AFB, EBC, DCF, DAF se coupent en ce même point G.

Théorème III.

« Lorsqu'un pentagone complet curviligne ABCDEHKLM (fig. 3)
» est formé par cinq arcs de cercle qui prolongés se couperaient
» tous en un même point que nous appellerons P; en prenant ces
» arcs de cercle quatre à quatre, on a évidemment cinq quadrilatères
» complets curvilignes, qui, d'après le théorème précédent,
» sont tels que les circonférences de cercle circonscrites aux quatre
» triangles de chacun de ces quadrilatères se coupent en un même
» point. Je dis maintenant qu'on peut faire passer une circonférence
» de cercle par les cinq points A', B'... en chacun desquels se
» rencontrent les quatre circonférences circonscrites aux quatre
» triangles de chacun des cinq quadrilatères complets ABKEMG,
» BCLAGH, etc. »

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que quatre quelconques B', C', D', E' de ces cinq points A', B', C', D', E' se trouvent sur une même circonférence de cercle. Or, puisque les quatre points A, H, C, D sont situés sur une même circonférence de cercle AHCD, d'après le théorème I, les quatre points B', C', D', E' qu'on peut considérer comme les secondes intersections des circonférences consécutives LAH et HBC, HBC et CKD, CKD et DEL, DEL et LAH se trouvent sur une même circonférence de cercle. Donc les cinq points A', B', C', D', E' se trouvent situés sur une même circonférence de cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

En supposant que le point P soit situé à une distance infinie des points A, B, C, D, E, les arcs AB, BC... ne sont autre chose que des lignes droites. D'où l'on voit que du théorème précédent se déduit le théorème relatif au pentagone que nous avons démontré à la page 486 de ce journal, et que nous avions déjà fait connaître, en 1836, dans le journal *le Géomètre*.

Nous allons faire voir maintenant que les trois théorèmes que nous venons de démontrer, sont également vrais lorsque les cercles sont tracés sur la surface d'une sphère. L'extension dont il s'agit se déduira facilement du théorème suivant.

Théorème IV.

« Soit abaissée du centre d'une sphère, que nous appellerons O, » sur un plan quelconque, que nous désignerons par O', une per- » pendiculaire indéfinie ; en prenant pour centre de projection un » des points S d'intersection de la surface de la sphère avec cette » perpendiculaire, la projection sur le plan O' de tout cercle tracé » sur la surface de la sphère O sera un cercle. »

Appelons P la seconde intersection de la perpendiculaire avec la sphère O, P' le pied de la perpendiculaire, et en général désignons par A, B, C... des points de la surface O, par A', B', C'.... leurs projections sur le plan O'. Il est évident que tout rayon projetant SAA' formera avec la perpendiculaire SPP' et les droites AP et A'P' deux triangles SAP, SA'P' rectangles l'un en A, l'autre en P'. Par conséquent, ces deux triangles semblables nous donneront

$$SA.SA' = SP.SP';$$

on obtiendrait de la même manière,

$$SB.SB' = SP.SP'.$$

Donc,

$$SA.SA' = SB.SB';$$

ce qui nous apprend que les quatre points A, A', B, B' sont sur une même circonférence de cercle.

Cela posé, soit a un cercle tracé sur la sphère O, a' sa projection sur le plan O'; considérons une surface de sphère V qui passe par la circonférence a et par un point D' de la courbe a'. Pour démontrer que la courbe a' est une circonférence de cercle, il suffira de faire voir que tous ses autres points se trouvent sur la sphère V. Or, E étant tout autre point de cette courbe a', les quatre points D, D', E, E' sont, d'après ce qui a été dit plus haut, sur une même circonférence, et cette circonférence n'est autre chose que l'intersection du plan des rayons projetants SDD', SEE' avec la sphère V, puisque cette sphère V passe par le point D' et par les points D et E de la circonférence a. Ainsi le point E′ appartient à la sphère V. Donc la courbe a' est une circonférence de cercle.

On démontrerait absolument de la même manière que, réciproquement, toute courbe tracée sur la surface de la sphère O, qui a pour projection un cercle sur le plan O′, est elle-même un cercle.

Il est maintenant facile de voir que le théorème I, par exemple, a lieu sur la surface d'une sphère, et que sa réciproque, le théorème II et le théorème III qui n'en sont que des conséquences, ont également lieu sur la surface d'une sphère.

Théorème V.

« Soit un tétraèdre curviligne ABCD (fig. 4) formé par quatre » surfaces sphériques PABC, PACD, PABD, PBCD, qui se coupent » toutes quatre en un même point P situé où l'on voudra dans » l'espace; soient pris six points E, F, G, H, I, K respectivement sur » chacune des six arètes AB, AC, AD, BC, CD, BD de ce tétraèdre. » Si l'on fait passer une surface de sphère par chacun des sommets du » tétraèdre et par les trois des six points E, F, G, H, I, K qui se » trouvent sur les arètes qui aboutissent à ce sommet: je dis » 1°. que les quatre sphères AEFG, BEHK, CHFI, DIKG, ainsi ob- » tenues se coupent trois à trois sur chacune des faces du tétraèdre; » 2°. qu'elles se coupent toutes quatre en un même point de l'espace. »

Car 1°. Les arcs de cercle AB, BC, CA se coupent en un même point P de la sphère PABC, sur laquelle ils sont tracés, et les points E, H, F appartenant respectivement à chacun des côtés du triangle curviligne ABC, d'après l'extension de la réciproque du théorème I, les trois circonférences AFE, BEH, CHF se coupent en un même point L de la sphère PABC. Or, ces circonférences AFE, BEH, CHF ne sont autre chose que les intersections de la sphère PABC avec chacune des trois sphères AEFG, BEHK, CHFI. Donc ces trois dernières sphères se coupent au point L de la sphère PABC.

On démontrerait de la même manière que trois autres des quatre sphères AEFG, BEHK, CHFI, DIKG se coupent en des points M, N, O qui appartiennent respectivement aux sphères PACD, PABD, PBCD.

2°. Les intersections des trois sphères PABC, PACD, PABD avec la sphère AEFG sont évidemment trois circonférences de cercle qui se coupent toutes trois en un même point A de la sphère PACD et deux à deux aux points E, F, G qui peuvent être considérés comme les sommets d'un triangle curviligne tracé sur cette dernière sphère, aux côtés duquel triangle appartiennent respectivement les points, L, M, N. Par conséquent, d'après l'extension de la réciproque du théorème I, les circonférences de cercle NEL, LFM, MGN se coupent toutes trois en un même point de cette sphère AEFG. Or, d'après ce qui a été dit dans la première partie de cette proposition-ci, chacune des sphères BEHK, CHFI, DIGK passe respectivement par les points N et L, L et M, M et N. Donc les trois circonférences NEL, LFM, MGN ne sont autre chose que les intersections de chacune des trois dernières sphères avec la sphère AEFG. Par conséquent ces trois mêmes sphères se coupent toutes trois en un même point de la sphère AEFG : ce qui revient à dire que les quatre sphères AEFG, BEHK, CHFI, DGIK se coupent toutes quatre en un même point. Ce qu'il fallait démontrer.

En supposant que le point P soit situé à une distance infinie des points A, B, C, D, le tétraèdre ABCD n'est autre chose qu'un tétraèdre ordinaire à faces planes. D'où l'on déduit le théorème suivant :

Théorème VI.

« Si après avoir pris un point sur chacune des six arêtes d'un tétraèdre, on fait passer une surface de sphère par chacun des sommets du tétraèdre et par les trois points pris sur les trois arêtes qui aboutissent à ce sommet, les quatre sphères ainsi déterminées se couperont trois à trois sur chacune des faces du tétraèdre, et toutes quatre en un même point de l'espace. »