JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FINCK

Discussion des surfaces du second degrés, d'après la Méthode de M. Plücker

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 495-504.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__495_0>

Discussion des surfaces du second degré, d'après la Méthode de M. Plücker;

Par M. FINCK,

Professeur au Collége et à l'École d'Artillerie de Strasbourg.

PROBLÈME.

Étant donnée une équation numérique du second degré à trois variables x, y, z, *rapportées à des axes rectilignes quelconques, reconnaître la nature de la surface qu'elle représente.*

L'équation du second degré présente deux cas principaux : ou elle renferme au moins un des carrés z^2, y^2, x^2, ou elle n'en renferme aucun.

PREMIER CAS.

Un des carrés au moins se trouve dans l'équation.

Supposons que ce soit z^2 et mettons l'équation sous la forme

$$(1)\quad z^2+A'y^2+A''x^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+2Cz+2C'y+2C''x+D=0.$$

Cette équation en général se transformera en toute autre qui renferme neuf coefficients ; ici nous décomposerons le premier membre en fonction du premier degré par rapport à x, y, z, parce que ces fonctions déterminent les distances des points de la surface à certains plans. Nous prendrons

$$(2)\quad (z+ay+bx+c)^2+d(y+ex+f)(y+e'x+f')+g=0.$$

Pour que les équations (1) et (2) soient identiques, il faut que

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} A' = a^2 + d,\quad A'' = b^2 + dee',\quad 2B = 2ab + d(e+e'),\\ B' = b,\quad B'' = a,\quad C = c,\quad 2C' = 2ac + d(f+f'),\\ \qquad 2C'' = 2bc + d(ef' + e'f),\quad D = c^2 + dff' + g. \end{array}\right.$$

De là

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} a = B'',\quad b = B',\quad c = C,\quad d = A' - B''^2,\\ e + e' = \dfrac{2(B - B'B'')}{A' - B''^2},\quad ee' = \dfrac{A'' - B'^2}{A' - B''^2},\\ f + f' = \dfrac{2(C' - B''C)}{A' - B''^2},\quad ef' + e'f = \dfrac{2(C'' - B'C)}{A' - B''^2},\\ \qquad g = D - C^2 - dff'. \end{array}\right.$$

On voit que le cas actuel se subdivise en deux, celui où $A' - B''^2$ n'est pas nul, et celui où ce binome est nul

$$(A)\qquad A' - B''^2 \gtrless 0.$$

Les valeurs de e, e' sont données par l'équation

$$(5)\qquad u^2 - 2\cdot\frac{B - B'B''}{A' - B''^2}u + \frac{A'' - B'^2}{A' - B''^2} = 0.$$

(a). Si les racines de cette équation sont réelles et inégales, la transformation est possible, d'une seule manière, en quantités réelles. Or le produit $(y + ex + f)(y + e'x + f')$ peut se mettre sous la forme

$$\left(y + \frac{e+e'}{2}\cdot x + \frac{f+f'}{2}\right)^2 - \left(\frac{e-e'}{2}x + \frac{f-f'}{2}\right)^2,$$

donc l'équation (2) devient

$$(6)\quad (z+ay+bx+c)^2 + d\left(y+\frac{e+e'}{2}x+\frac{f+f'}{2}\right)^2 - d\left(\frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}\right)^2 + g = 0.$$

Prenons pour plans coordonnés les trois plans

$$(7)\quad z+ay+bx+c=0,\quad y+\frac{e+e'}{2}\cdot x+\frac{f+f'}{2}=0,\quad \frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}=0$$

La fonction $z+ay+bx+c$, multipliée par un coefficient constant convenable m, représentera la distance du point z, y, x de la surface, à un point du premier de ces plans, distance dont la direction est arbitraire, et que nous supposerons parallèle à l'intersection des deux autres, même remarque sur $y+\frac{e+e'}{2}\cdot x+\frac{f+f'}{2}$, et $\frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}$.

Ainsi prenant le premier de ces plans pour plan $x'y'$, le second pour $x'z'$, le troisième pour $y'z'$, nommant m, n, p, trois constantes que nous déterminerons plus bas, nous poserons pour chaque point de notre surface

$$z+ay+bx+c=mz',\ y+\frac{e+e'}{2}x+\frac{f+f'}{2}=ny',\ \frac{e-e'}{2}.x+\frac{f-f'}{2}=pz,$$

et l'équation (6) devient

$$(8)\qquad m^2z'^2+dx^2y'^2-dp^2x'^2+g=0:$$

c'est une surface à centre, rapportée à ce point pour origine des coordonnées. Ce même centre est donc l'intersection des trois plans (7), intersection dont la forme des équations (7) permet facilement de calculer les coordonnées. De plus les plans coordonnés sont des plans diamétraux conjugués, leurs intersections sont des diamètres conjugués connus de position; si donc on cherche les intersections de ces diamètres avec la surface, au moyen des équations 6 et 7, on pourra calculer les distances du centre à ces points, et avoir ainsi les longueurs des diamètres, ce qui déterminera m^2, n^2, p^2. Remarquons du reste que cela se réduit à un seul calcul; car les trois équations suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} (z+ay+bx+c)^2+g' &= 0,\\ d\left(y+\frac{e+e'}{2}x+\frac{f+f'}{2}\right)^2+g'' &= 0,\\ -d\left(\frac{e-e'}{2}\cdot x+\frac{f-f'}{2}\right)^2+g''' &= 0, \end{aligned}\right.$$

étant résolues, si dans les valeurs de z, y, x on fait successivement chacune des trois quantités g', g'', g''' égale à g, et les deux autres nulles, on aura les extrémités des trois diamètres; si l'on fait nulle les trois quantités g', g'', g''', on aura le centre.

Revenons à l'équation (8),

I.	$d \gtrless 0$	et $g > 0$	hyperboloïde à deux nappes,
II.	*id.*	$g = 0$	cône,
III.	*id.*	$h < 0$	hyperboloïde à une nappe.

(*b*). Si les racines de l'équation (5) sont imaginaires, on a des résultats de la forme

$$e = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad e' = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad f = \gamma + \delta\sqrt{-1}, \quad f' = \gamma - \delta\sqrt{-1},$$

d'où

$$e + e' = 2\alpha, \quad e - e' = 2\beta\sqrt{-1}, \quad f + f' = 2\gamma, \quad f - f' = 2\delta\sqrt{-1},$$

et l'équation (6) devient

$$(10) \quad (z + ax + by + c)^2 + d(y + \alpha x + \gamma)^2 + d(\beta x + \delta)^2 + g = 0.$$

Dans le cas où d est négatif, cette équation reproduit les trois surfaces déjà trouvées.

Examinons le cas où d est positif

IV	$g > 0$	ellipsoïde imaginaire,
V	$g = 0$	un point,
VI	$g < 0$	ellipsoïde réel.

Les trois plans diamétraux conjugués, et le centre se déduisent des équations (7) et (9).

(*c*). Si les racines de l'équation (5) sont égales, la troisième et la quatrième des équations (4) deviennent

$$f + f' = \frac{2(C' - B''C)}{A' - B''^2}, \quad f + f' = \frac{2(C'' - B'C)}{e(A' - B''^2)};$$

elles sont ou indéterminées ou incompatibles. Dans ce cas le second terme de l'équation (2) se met sous la forme

$$d(y+ex)^2+d(f+f')y+de(f+f')x+ff',$$

et pour faire disparaître la particularité actuelle, il suffit d'ajouter un terme en x, c'est-à-dire de mettre l'équation sous la forme

$$(11)\quad (z+ay+bx+c)^2+d(y+ex)^2+fy+gx+h=0.$$

où f, g, ne signifient plus la même chose; et l'on a les conditions

$$a=B'',\quad b=B',\quad c=C,\quad d=A'-B''^2,\quad e^2=\frac{A''-B'^2}{A'-B''^2}.$$

$$(12)\qquad B'B''+de=B,$$

qui est identique en vertu de l'égalité des racines de l'équation (5)

$$f=2C'-2B''C,\quad g=2C''-2B'C,\quad h=D-C^2.$$

L'équation (11) présente deux cas : si f et g ne sont pas nuls tous les deux, on posera

$$z+ay+bx+c=mz',\quad y+ex=ny',\quad fy+gx+h=px$$

et elle devient

$$(13)\qquad m'^2z'^2+dn^2y'^2+px'=0.$$

VII. $d>0$, paraboloïde elliptique,
VIII. $d<0$, *idem* hyperbolique.

Si f et g sont nuls, l'équation se réduit à

$$(14)\qquad m^2z'^2+dn^2y'^2+h=0,$$

IX. $d>0$, $h>0$, cylindre elliptique imaginaire,
X. *idem*, $h=0$, une droite,
XI. *idem*, $h<0$, cylindre elliptique réel,
XII. $d<0$, $h\gtrless 0$, cylindre hyperbolique,
XIII. *idem*, $h=0$, deux plans qui se coupent.

$$\text{(B)} \qquad A' - B''^2 = 0.$$

La disparition de d prouve que la transformée ne doit pas contenir un second terme en y^2; on prendra donc

$$(15) \qquad (z + ay + bx + c)^2 + d(z + ex + f)(x + h) + g = 0.$$

Les lettres n'ayant pas la même signification que plus haut. On aura les conditions

$$a^2 = A', \quad a = B'' \text{ qui s'accordent, vu que } A' - B''^2 = 0.$$

$$(16) \quad \begin{cases} d = 2(B - B'B''), \quad e = \dfrac{A'' - B'^2}{d}, \quad c = C, \\ h = \dfrac{2(C' - B''C)}{d}, \quad f = \dfrac{2(C'' - B'C)}{d} - eh, \quad g = D - C^2 - dfh. \end{cases}$$

Tant que d ou $B - B'B''$ n'est pas nul, la transformation est possible d'une manière unique, et l'équation (15), donne

$$(17) \quad (z + ay + bx + c)^2 + d\left(\tfrac{1}{2}z + x\tfrac{e+1}{2} + \tfrac{f+h}{2}\right)^2 \\ - d\left(\tfrac{1}{2}z + x\tfrac{e-1}{2} + \tfrac{f-h}{2}\right)^2 + g = 0$$

qui rentre dans l'équation (8).

Si $d = 2(B - B'B'')$ est nul, il faut que le second terme en xy disparaisse également dans la transformée, que l'on prendra sous la forme

$$(18) \quad (z + ay + bx + c)^2 + d(x + e)(x + f) + hy + g = 0,$$

les coefficients désignant des valeurs autres que tout-à-l'heure.

Les conditions sont

$$a^2 = A', \quad b^2 + d = A'', \quad ab = B, \quad b = B', \quad a = B'',$$

équations qui donnent a, b, et $d = A'' - B'^2$, et s'accordent; d'ailleurs

$$e = C, \quad h = 2(C' - CB''), \quad e + f = 2.\frac{C'' - CB'}{d}, \quad ef = \frac{D - C^2 - g}{d}.$$

Toutes les fois que $d = A'' - B'^2$ n'est pas nul, on peut disposer de g, qui est arbitraire, de façon que e et f soient réels. Ainsi (18) devient

$$(19)\quad (z+ay+bx+c)^2+d\left(x+\frac{e+f}{2}\right)^2+hy+g-d\left(\frac{e-f}{2}\right)^2=0,$$

selon que h est nul ou non, cette équation rentre dans (14) ou dans (13). Si $d = A'' - B'^2$ est nul, l'équation ne doit pas contenir un second terme en x^2; vu que $A' = B''^2$, $B = B'B''$ et $A'' = B'^2$, on peut mettre (1) sous la forme

$$(20)\qquad (z+B''y+B'x)^2+2Cz+2C'y+2C''x+D=0.$$

Tant que C, C', C'', ne sont pas nuls à la fois, elle se met sous la forme

$$m^2z'^2+nx'=0,$$

et représente

XIV un cylindre parabolique.

Si C, C', C'', sont tous nuls, et que

XV	$D < 0$,	deux plans parallèles réels,
XVI	$D = 0$,	un plan,
XVII	$D > 0$,	deux plans parallèles imaginaires.

SECOND CAS.

Les trois carrés manquent.

Supposons que yz ne manque pas, et mettons l'équation sous la forme

$$(21)\qquad Bxy+B'xz+yz+Cz+C'y+C''x+E=0,$$

on la transformera en

$$(22)\quad (z+ax+b)(y+cx+d)+e(x+f)(x+g)+h=0,$$

et l'on aura

$$c = B',\quad a = B,\quad d = C,\quad b = C',\quad e = -BB',$$

$$(23)\qquad f + g = \frac{BC + B'C' - C''}{BB'},\quad fg = \frac{h + CC' - E}{BB'}.$$

Dans le cas où e n'est pas nul, on peut disposer de h de manière que f et g soient réels, et l'équation (22) devient

$$(24)\quad \begin{cases} [z+y+(a+c)x+b+d]^2-[z-y+(a-c)x+b-d]^2 \\ \qquad + e(2x+f+g)^2+4h-e(f-g)^2 = 0. \end{cases}$$

Le dernier terme ne contient h qu'en apparence, et l'équation représente l'un des deux hyperboloïdes ou le cône.

Si e est nul, B ou B' l'est; soit $B=0$, l'équation (21) devient

$$(25)\qquad z(y+B'x+C)+C'y+C''x+E=0,$$

ou

$$(26)\quad (z+y+B'x+C)^2-(z-y-B'x-C)^2+4C'y+4C''x+4E=0.$$

Elle fournit un paraboloïde hyperbolique, ou un cylindre hyperbolique, ou deux plans qui se coupent, selon que C', C'' ne sont pas nuls à la fois, ou qu'ils sont nuls tous les deux sans que E le soit, ou enfin que C', C'', E, sont nuls.

Voici donc en résumé ce qu'il y a à faire pour discuter une équation numérique du second degré entre x, y, z.

PREMIER CAS.

L'équation renferme au moins un des carrés z^2.

L'équation étant sous la forme (1), on calcule $A'-B''^2$,

$$(\mathrm{A})\qquad A' - B''^2 \gtrless 0.$$

On forme l'équation (5),

$$u^2 - 2\cdot\frac{B-B'B''}{A'-B''^2}\cdot u + \frac{A''-B'^2}{A'-B''^2} = 0.$$

Si cette équation a ses racines réelles inégales, au moyen des équations (4), on calcule g, qu'on trouve égal, inférieur ou supérieur à zéro.

Si $g > 0$, hyperboloïde à deux nappes; $g = 0$, cône; $g < 0$ hyperboloïde à une nappe.

L'équation (5) ayant ses racines imaginaires, on calcule encore g.

Si $A'' - B'^2$ est négatif, on a les mêmes surfaces, mais avec $g > 0$ l'hyperboloïde à une nappe et $g < 0$, l'autre.

Si $A'' - B'^2$ est > 0, on a l'ellipsoïde réel avec $g < 0$, le point avec $g = 0$, l'ellipsoïde imaginaire avec $g = 0$.

Du reste l'équation (5) a ses racines réelles et inégales, ou imaginaires selon que

$$(B - B'B'')^2 \quad \text{est} > \text{ou} < \quad (A'' - B'^2)(A' - B''^2),$$

c'est-à-dire selon que

$$B^2 + A'B'^2 + A''B''^2 \quad \text{est} > \text{ou} < \quad 2BB'B''.$$

Si le coefficient de z^2 était A, au lieu de 1, cette condition serait

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 \quad > \text{ou} < \quad 2BB'B''.$$

Dans le cas où l'équation (5) a ses racines égales, ces deux dernières quantités le sont aussi.

On a recours à la transformée (11), et l'on calcule $C' - B''C$. $C'' - B'C$. Ces deux quantités n'étant pas supposées nulles à la fois, selon que $A' - B''^2$ est $>$ ou < 0, on aura le paraboloïde elliptique, ou le paraboloïde hyperbolique.

Toutes les fois que $C' - B''C$, $C'' - B'C$ sont nuls, on calcule $D - C^2$, et l'on a cylindre elliptique imaginaire,

	si	$A' - B''^2 > 0$	et	$D - C^2 > 0$,
id. réduit à une droite	si	*id.*	et	$D - C^2 = 0$,
id. elliptique réel	si	*id.*	et	$D - C^2 < 0$,
cylindre hyperbolique		$A' - B''^2 < 0$		$D - C^2 \gtrless 0$,
deux plans qui se coupent		*id.*		$D - C^2 = 0$

(B) $\qquad A' - B''^2 = 0.$

Si $B - B'B''$ n'est pas nul, l'équation représente un des deux hyperboloïdes ou un cône, le signe de $B - B'B''$ combiné avec la quantité g des équations (16), fera reconnaître l'espèce de la surface.

Si $B - B'B''$ est nul, mais que $A'' - B'^2$ ne le soit pas, on aura le paraboloïde elliptique avec $C' - CB'' \gtrless 0$ et $A'' - B'^2 > 0$, le paraboloïde hyperbolique avec $C' - CB'' \gtrless 0$ et $A'' - B'^2 > 0$, l'un des cylindres ou la droite si $C' - CB'' = 0$.

Dans le cas où $A'' - B'^2 = 0$, sans que C, C', C'' soient nuls tous les trois, on a le cylindre parabolique.

Si de plus C, C', C'' sont nuls; avec $D < 0$, deux plans parallèles $D = 0$, un plan $D > 0$, deux plans parallèles imaginaires.

SECOND CAS.

Les trois carrés manquent.

Tous les fois que les trois rectangles sont dans l'équation, elle représente l'un des deux hyperboloïdes ou le cône. Dans l'équation (24), selon que e et $4h - e(f-g)^2$, sont de même signe ou de signes contraires, on aura l'hyperboloïde à deux nappes, ou l'hyperboloïde a une nappe. Si $4h - e(f-g)^2$ est nul, c'est le cône. Enfin si l'un des rectangles manque, on a un paraboloïde hyperbolique, toutes les fois que les termes du premier degré qui renferment les mêmes coordonnées que ce rectangle, ne manquent pas tous les deux; dans le cas contraire un cylindre hyperbolique, si l'équation n'est pas privée du dernier terme, et deux plans qui se coupent, si elle en est privée.

On remarquera du reste que la discussion ci-dessus fait connaître un système de coordonnées par rapport auquel l'équation des surfaces à centre prend la forme

$$Pz^2 + P'y^2 + P''x^2 = Q,$$

et celle des surfaces privées de centre,

$$Pz^2 + P'y^2 + 2Qx = 0.$$