JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CORIOLIS

Calcul des effets de la Machine à élever l'eau, au moyen des oscillations, de l'invention de M. de Caligny

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 437-459.

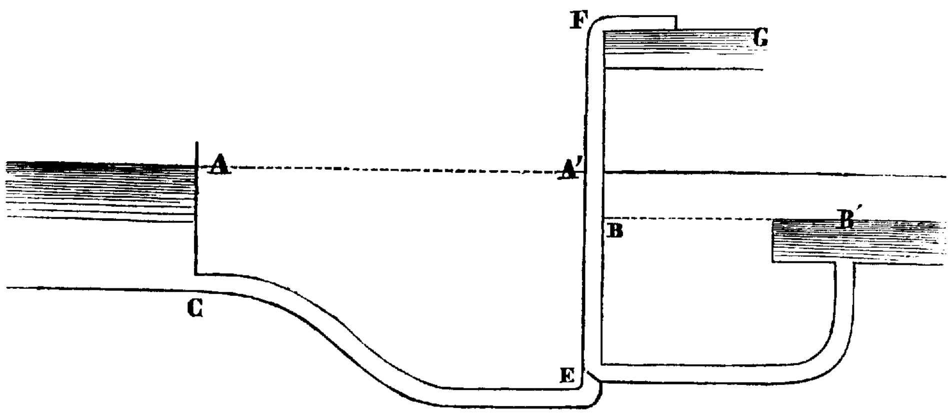
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__437_0>

Calcul des effets de la Machine à élever de l'eau, au moyen des oscillations, de l'invention de M. de Caligny;

Par G. CORIOLIS (*).

Voici sommairement en quoi consiste la machine de M. de Caligny:

L'eau d'une source ou réservoir en A communique avec un tuyau CE et se trouve d'abord arrêtée en E par un clapet fermé. On ouvre ce clapet et l'eau monte de E en F. Arrivé à ce dernier point, à une



(*) Le Mémoire de M. de Caligny a été l'objet d'un rapport de M. Coriolis que l'on trouvera dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences* (20 août 1838). L'auteur lui-même s'était occupé du calcul des effets que sa machine peut produire. A l'aide de considérations purement géométriques, il a obtenu des résultats semblables à ceux que M. Coriolis déduit aujourd'hui de l'analyse. La Note que M. de Caligny nous a remise et que nous imprimons dans ce cahier fera suffisamment connaître l'esprit de la méthode qu'il a suivie dans son Mémoire.

J. L.

hauteur A′F moindre que A′E, le liquide se verse pendant un certain temps dans un bassin G tant qu'il continue à avoir une vitesse ascensionnelle. Quand cette vitesse est devenue nulle et que l'orifice F cesse de verser de l'eau, le clapet en E referme l'issue de communication avec le tuyau EC et ouvre celle qui établit la communication de la colonne EF avec le tuyau EB′. Alors la colonne EF redescend et fait une oscillation pendant laquelle le tuyau EB′ verse dans un bassin ou bief B′ dont le niveau est inférieur au niveau AA′ du bief supérieur.

La hauteur du point F est prise de telle sorte que BF soit un peu plus grand que BE; le petit excès est seulement destiné à compenser le frottement et la perte de force vive de sortie en B′ qui empêcherait l'oscillation descendante de la colonne EF d'abaisser l'eau du tuyau vertical jusqu'en E. Les choses étant ainsi disposées; après le versement en F, l'eau ayant perdu sa vitesse dans la colonne EF, le clapet E ferme l'issue avec le tuyau EC, la colonne EF doit descendre jusqu'en E et verser dans le bassin B′ un volume qui lui est égal. Le même jeu recommence quand le clapet E ferme de nouveau la communication avec le tuyau EB′, et l'ouvre entre les tuyaux CE et EF.

Le jeu du clapet qui est fortement aidé par le mouvement même de l'eau, pourrait être assuré par une queue portant un vase qui se remplirait et se viderait alternativement et qui prendrait ainsi un mouvement alternatif de bascule.

Nous poserons les notations suivantes :

l, longueur du tuyau CE depuis le bassin supérieur jusqu'au point E, où l'on veut élever l'eau;

H, la chute A′B entre les deux bassins;

$\varkappa$, la hauteur A′F à laquelle le tuyau ascensionnel verse l'eau au-dessus du niveau AA′ du bassin supérieur ;

h, la profondeur A′E à laquelle se trouve le tuyau de conduite, c'est-à-dire le pied du tuyau ascensionnel EF au-dessous du niveau AA′ de l'eau dans le bassin supérieur.

Examinons quelles relations il y aurait entre les hauteurs h, H et $\varkappa$ suivant qu'on voudra élever une quantité plus ou moins grande d'eau au point F; et cela en négligeant d'abord les frottements dans les tuyaux.

Nous supposerons que l'eau est reçue en F dans un réservoir où elle arrive par un petit coude horizontal situé à fleur d'eau de ce réservoir, le tuyau horizontal étant assez long pour contenir à chaque oscillation l'eau qu'elle peut y amener. De telle sorte que la vitesse dans ce bout du tuyau soit la même que dans le tuyau vertical qui le précède.

Nous désignerons par x_1 la longueur de la colonne horizontale du fluide qui est amené dans le tube horizontal et qui passe ainsi par le coude en F.

Nous aurons, par le principe de la transmission de travail ou quantité d'action

$$x_1\nu + \frac{\nu^2}{2} = \frac{h^2}{2}, \quad \text{ou} \quad 2x_1\nu = (h+\nu)(h-\nu).$$

Si m désigne le rapport entre l'eau élevée et l'eau qui doit se rendre dans le bassin inférieur, on aura

$$\frac{x_1}{h+\nu} = m.$$

En éliminant x_1 entre cette équation et la précédente, on trouve

$$2m\nu = h - \nu,$$

ou

$$h = \nu(1 + 2m).$$

Tel est le rapport entre la hauteur ν où l'eau est élevée par la machine et la hauteur h de l'oscillation.

En négligeant toujours les frottements, on pourra faire écouler la colonne EF dont la hauteur est $h+\nu$, en la faisant arriver à la superficie d'un bassin inférieur dont le niveau sera à une hauteur $\frac{h+\nu}{2}$ au-dessus du point E. Ainsi H étant la différence de niveau entre les superficies dans les deux bassins, on aura

$$h - \mathrm{H} = \frac{h+\nu}{2}$$

ou

$$h = 2\mathrm{H} + \nu.$$

En combinant cette équation avec la précédente, il vient

$$\nu = \frac{\mathrm{H}}{m}$$

et $$h = \left(2 + \frac{1}{m}\right) H.$$

Telles sont les formules qui donnent les relations entre la hauteur H de la chute, la profondeur h d'où il faut faire partir l'oscillation, et la hauteur n à laquelle on élève l'eau au-dessus du niveau du bassin supérieur.

Si l'on prend $m = 1$, on a

$$n = H, \quad \text{et} \quad h = 3H.$$

Si l'on prend $m = \frac{1}{2}$, on a

$$n = 2H \quad \text{et} \quad h = 4H.$$

En général, plus m sera petit, c'est-à-dire moins on voudra élever d'eau comparativement à celle qui se rend dans le bassin inférieur, plus on l'élèvera haut et plus il faudra que la profondeur h du tuyau de conduite au-dessous de la source supérieure devienne considérable.

Tels sont les calculs à faire sur cette machine quand on néglige les frottements et qu'on suppose que les diamètres de tous les tuyaux sont les mêmes.

Si l'on suppose, toujours dans l'hypothèse où l'on néglige les frottements, que le tuyau d'ascension, à partir du niveau du bassin supérieur, c'est-à-dire après la hauteur h et dans la hauteur égale à n, n'ait qu'un rayon r, tandis que celui qui sert de conduite de C en E et de E en A′ ait un rayon R; en admettant un raccordement qui empêche la perte de force vive au passage d'un diamètre 2R au diamètre $2r$, on fera les calculs suivants.

La force vive de la colonne fluide au moment où elle atteint le coude en F, est

$$\frac{\pi}{2}(R^2h^2 - r^2n^2).$$

Si V est le volume versé, c'est-à-dire amené dans le tuyau horizontal adapté au coude en F, il viendra

$$Vn = \frac{\pi}{2}\left(R^2h^2 - r^2n^2\right).$$

Si V′ est le volume qui se verse ensuite dans le bassin inférieur, on a

$$V' = \pi(R^2h + r^2\eta).$$

Donnerons-nous, comme précédemment, le rapport m de ces volumes; nous trouverons

$$\frac{V}{V'} = m = \frac{\frac{R^2}{r^2}h^2 - \eta^2}{2\left(\frac{R^2}{r^2}h\eta + \eta^2\right)},$$

ou bien

$$\frac{\eta^2}{h^2} + \frac{2m}{1+2m}\frac{R^2}{r^2}\frac{\eta}{h} = \frac{1}{1+2m}\cdot\frac{R^2}{r^2};$$

de là on tire

$$\frac{\eta}{h} = \frac{R}{r}\left[\frac{\sqrt{\left(1+2m+m^2\frac{R^2}{r^2}\right)} - m\frac{R}{r}}{1+2m}\right].$$

Pour obtenir la relation avec la hauteur H de la chute, on posera la condition que le niveau du bassin inférieur soit à la hauteur du centre de gravité de la colonne d'eau comprise entre E et F dont la hauteur est $h+\eta$; ce qui donnera, en égalant les moments en-dessus et en-dessous du niveau BB′,

$$\frac{R^2(h-H)^2}{2} = \frac{R^2H^2}{2} + r^2\left(H+\frac{\eta}{2}\right)\eta,$$

ou bien

$$\eta^2 + 2\eta H = \frac{R^2}{r^2}(h^2 - 2hH).$$

En posant pour abréger

$$K = \frac{R}{r}\left[\frac{\left(1+2m+m^2\frac{R^2}{r^2}\right) - m\frac{R}{r}}{1+2m}\right],$$

on a

$$\eta = Kh.$$

Mettant cette valeur dans l'équation précédente, elle donne

$$h = \frac{\left(\frac{R^2}{r^2}+K\right)}{\frac{R^2}{r} - K^2}2H,$$

et

$$n = K\frac{\left(\frac{R^2}{r^2} + K\right)}{\left(\frac{R^2}{r^2} - K^2\right)} 2H.$$

Ces valeurs, quand on fait $R = r$, reviennent à celles qu'on avait trouvées précédemment.

Pour discuter la marche de K et de h et n avec le rapport $\frac{R^2}{r^2}$, désignons celui-ci par x et K par y. Nous aurons entre les coordonnées x et y la relation

$$y^2 + \frac{2m}{1+2m}xy = \frac{1}{1+2m}x.$$

Cette équation appartient à une hyperbole passant par l'origine, et dont le centre a pour abscisse

$$-\frac{1}{2m}\left(\frac{1+2m}{m}\right),$$

et pour ordonnée

$$\frac{1}{2m}.$$

Elle a pour asymptote une parallèle à l'axe des x et une droite inclinée vers les x négatifs, d'un angle dont la tangente est $\frac{(1+2m)}{2m^2}$. La quantité y ou K croît donc assez peu avec $\frac{R^2}{r^2}$. Elle ne varie, quand on rétrécit le tuyau depuis $\frac{R^2}{r^2} = 1$ jusqu'à $\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{0}$, que de

$$K = \frac{1}{1+2m}$$

à

$$K = \frac{1}{2m}.$$

Ainsi h et n croissent toujours avec H et avec $\frac{R^2}{r^2}$ pour une même valeur de m.

En laissant h, η et H les mêmes, le rapport m qui est donné par

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{R^2}{r^2}h^2 - \eta^2}{\frac{R^2}{r^2}h\eta + \eta^2}\right),$$

deviendra plus grand quand r deviendra plus petit; ainsi, comme on devait s'y attendre, on versera plus d'eau dans une même machine lorsque r sera plus petit.

Occupons-nous maintenant de la durée des oscillations, en restant toujours dans l'hypothèse où l'on néglige les frottements.

En désignant par l la longueur du tuyau de C en E, et par x la hauteur variable en-dessus du point E, où est la tête de la colonne liquide à un instant quelconque, l'équation du mouvement, depuis l'instant où l'eau commence à s'élever en E jusqu'à l'instant où elle commence à verser en F, est évidemment

$$(l + x)\frac{v^2}{2g} = x\left(h - \frac{x}{2}\right),$$

en négligeant toutefois la force vive de l'eau contenue dans le bassin supérieur. De là on tire

$$t = \int_0^{h+\eta} \frac{\sqrt{l+x}\, dx}{\sqrt{gx(2h-x)}}.$$

Comme on peut négliger $h - x$ devant $l + h$ sans grande erreur, on a pour le temps qu'emploie l'eau à passer de E en F,

$$t = \sqrt{\frac{l+h}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\eta}{h}\right)\right].$$

Pour la seconde partie du mouvement, lorsque l'eau sort par l'orifice F et qu'elle coule comme nous l'avons supposé dans un tuyau horizontal, faisant suite à un coude placé en E; on aura pour l'équation du mouvement, en désignant par x la longueur du prisme d'eau qui est sortie à un instant quelconque du coude F, et par x_1 la longueur du prisme total,

$$(l + h + \eta + x)\frac{v^2}{2g} = \frac{h^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} - \eta x,$$

d'où

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{l + h + \eta + x}\, dx}{\sqrt{(h^2 - \eta^2 - 2\eta x)}}.$$

En négligeant encore ici x devant $l + h + \eta$, on aura pour le temps t' de l'écoulement

$$t' = \frac{\sqrt{l + h + \eta}}{g}\left(\frac{\sqrt{h^2 - \eta^2} - \sqrt{h^2 - \eta^2 - 2\eta x_1}}{\eta}\right).$$

Enfin, si l'on veut le temps de l'écoulement de la colonne EF pour qu'elle se rende dans le bassin inférieur, on l'obtiendra par une formule tout analogue à celle qui a donné la durée de l'oscillation de E en F. On aura pour cette troisième durée t'' ou période de mouvement de la machine

$$t'' = \pi \sqrt{\frac{l'' + \frac{h + \eta}{2}}{g}},$$

où l'' désigne la longueur du tuyau de décharge depuis le point E jusqu'à son entrée dans le bassin inférieur.

Ainsi, pendant une durée égale à $t + t' + t''$, la machine, si l'on négligeait les frottements, aurait élevé un volume d'eau égal à

$$\pi R^2 \frac{(h^2 - \eta^2)}{2\eta}.$$

Cette expression ne peut être regardée comme une valeur approchée, lorsqu'on considère les frottements, parce qu'ils ont une influence sensible sur le volume versé dans le cas où ce volume est petit.

Nous allons maintenant revenir sur la considération des frottements pour calculer les effets de la machine. En conservant les notations précédentes, nous y ajouterons les suivantes : nous désignerons par

x la hauteur verticale à laquelle se trouve la tête de la colonne oscillante, dans le tube vertical au-dessus du niveau du bassin supérieur, en sorte que x croîtrait de $-h$ à $+h$ s'il n'y avait pas de frottement ;

R le rayon du tuyau et du tube vertical qui a la même section que ce tuyau;

v la vitesse de la colonne à un instant quelconque;

g la gravité;

β un coefficient tel que le frottement dans un tuyau d'une longueur l et d'un rayon R, soit représenté par $2\pi R l \beta \frac{v^2}{g}$.

Nous admettrons avec M. de Caligny, que l'on puisse négliger le terme des frottements qui est proportionnel à la vitesse, son coefficient étant comme on sait très petit, par rapport à celui qui affecte le carré de cette vitesse.

On pourra négliger la force vive de l'eau dans le bassin supérieur, qui a ordinairement une grande capacité; dès-lors l'équation des forces vives donnera

$$\pi R^2 (l + h + x) \frac{v^2}{2g} = \pi R^2 \left(\frac{h^2 - x^2}{2}\right) - 4\pi\beta R \int (l + h + x) \frac{v^2}{2g}\, dx.$$

Si l'on pose pour abréger

$$(l + h + x) \frac{v^2}{2g} = y,$$

on aura en différentiant l'équation ci-dessus,

$$dy = -xdx - \frac{4\beta}{R} ydx,$$

ou, en posant pour abréger $\frac{4\beta}{R} = \alpha$,

$$dy + \alpha ydx = -xdx.$$

L'intégrale de cette équation est

$$ye^{\alpha x} = -\int e^{\alpha x} xdx + c,$$

c désignant la constante arbitraire.

Intégrant par partie, on trouve

$$ye^{\alpha x} = -\frac{e^{\alpha x} x}{\alpha} + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + c.$$

On déterminera la constante par la condition que $y=0$ pour $x=-h$; on aura ainsi

$$ye^{\alpha x} = \frac{-e^{\alpha x}x - e^{-\alpha h}h}{\alpha} + \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha h}}{\alpha^2},$$

ou bien

$$y = \frac{-\alpha x + 1 - e^{-\alpha(h+x)}(\alpha h + 1)}{\alpha^2}.$$

Cette valeur redonne, comme cela doit être,

$$y = \frac{h^2 - x^2}{2},$$

quand on y fait $\alpha = 0$.

Si l'on veut la force vive à l'instant où la colonne est arrivée au haut du tube, on fera $x = \eta$ dans la valeur de y, et l'on aura, en la désignant par y_0,

$$y_0 = (l + h + \eta)\frac{v_0^2}{2g} = \frac{-\alpha\eta + 1 - (1 + \alpha h)e^{-\alpha(h+\eta)}}{\alpha^2}.$$

Pour avoir la perte par frottement dans le mouvement, jusqu'au moment où la colonne ascendante arrive à l'orifice, on devra calculer l'intégrale

$$\alpha\pi R^2 \int y dx,$$

en la prenant de

$$x = -h \quad \text{à} \quad x = \eta.$$

Cette expression s'obtient simplement en remarquant que l'on a par l'équation même du mouvement,

$$\alpha\pi R^2 \int y dx = \pi R^2 \left[\frac{(h^2 - x^2)}{2} - y\right]:$$

ainsi la perte deviendra

$$\pi R^2 \left[\frac{(h^2 - \eta^2)}{2} - y_0\right].$$

Si l'on veut seulement calculer à quelle hauteur la colonne peut s'élever sous l'influence des frottements, il faut prendre la valeur de x qui correspond à $y = 0$.

En posant pour cette valeur de x, $h - x = x'$, on déterminera x' ou la perte de hauteur d'oscillation qui est due au frottement, par l'équation

$$-\alpha(h - x') + 1 - (1 + \alpha h)\, e^{-\alpha(2h - x')} = 0,$$

ou bien

$$\alpha x' + 1 - \alpha h = \frac{(1 + \alpha h)\, e^{\alpha x'}}{e^{2\alpha h}}.$$

Cette équation ne peut se résoudre que par approximation; on sait qu'elle n'a que deux racines réelles qui peuvent se construire par l'intersection d'une droite et d'une courbe exponentielle. La racine qui répond à la question est celle qui devient zéro pour $\alpha = 0$.

Ayant une fois la valeur de x' on trouvera facilement la perte par les frottements dans une oscillation entière; il suffira dans l'expression précédente de la perte, de remplacer y_0 par zéro et par $h - x'$: elle sera donc

$$\pi R^2 x' \left(h - \frac{x}{2}\right).$$

Pour avoir x' par approximation, on remplacera $e^{\alpha x'}$ par $1 + \alpha x'$, et l'on aura alors pour une valeur approchée un peu plus petite que la valeur exacte,

$$x' = \frac{(1 + \alpha h)\, e^{-2\alpha h} + \alpha h - 1}{\alpha\left[1 - (1 + \alpha h)\, e^{-2\alpha h}\right]}.$$

Si l'on voulait une valeur plus exacte, on remplacerait $e^{\alpha x'}$ par $1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x'^2}{2}$, et il viendrait, en posant pour abréger

$$H = (1 + \alpha h)\, e^{-2\alpha h},$$

$$\alpha x' + 1 - \alpha h = H\left(1 + \alpha x' + \frac{\alpha^2 x'^2}{2}\right),$$

$$x'^2 - \frac{2x'}{\alpha}\left(\frac{1 - H}{H}\right) = \frac{-2(H + \alpha h - 1)}{\alpha H}.$$

Si l'on néglige x'^2, on a seulement, comme ci-dessus,

$$x' = \frac{H + \alpha h - 1}{\alpha(1 - H)},$$

et en ne négligeant pas x'^2, on a

$$x' = \frac{1 - H - \sqrt{(1 - H^2 - 2\alpha h H)}}{\alpha H}.$$

Dans le cas où αh est une quantité petite devant l'unité, on pourra simplifier beaucoup le calcul de x'. Pour cela on développera par rapport aux puissances de α la valeur de x' trouvée ci-dessus en négligeant x'^2; on a ainsi

$$H = e^{-2\alpha h}(1 + \alpha h) = (1 + \alpha h)\left(1 - 2\alpha h + \frac{4\alpha^2 h^2}{2} - \frac{8\alpha^3 h^3}{2.3} + \frac{16\alpha^4 h^4}{2.3.4}\right).$$

Substituant dans x', on trouve

$$x' = \frac{\frac{2}{3}\alpha^3 h^3 - \frac{2}{3}\alpha^4 h^4 + \frac{4}{15}\alpha^5 h^5 - \text{etc.}}{\alpha^2 h - \frac{2}{3}\alpha^4 h^3 + \frac{2}{3}\alpha^5 h^4 - \text{etc.}},$$

ou bien

$$x' = \frac{2}{3}\alpha h\left(\frac{1 - \alpha h + \frac{2}{5}\alpha^2 h^2 - \text{etc.}}{1 - \frac{2}{3}\alpha^2 h^2 + \frac{2}{3}\alpha^3 h^3 - \text{etc.}}\right).$$

En négligeant αh devant l'unité, on a donc

$$\frac{x'}{h} = \frac{2}{3}\alpha h.$$

La formule d'où cette valeur de x' est déduite, est déjà approximative et donne une expression trop petite. Comme celle-ci comporte une seconde erreur en sens contraire, il s'ensuit que la valeur précédente doit être très approchée; néanmoins elle reste toujours un peu trop grande, parce que la différence en moins résultant de la première formule qui donne x', est moins considérable que celle de cette dernière formule où nous négligeons αh devant l'unité : dans la première formule nous n'avions négligé que $\frac{\alpha^2 x'^2}{2}$.

Pour obtenir α, rappelons-nous qu'on a

$$\alpha = \frac{4\beta}{R},$$

et que β est un coefficient tel que la résistance d'un tuyau d'une longueur l et d'un rayon R est exprimée par

$$\beta . 2\pi R l \frac{v^2}{g};$$

on aura donc, en partant de la valeur numérique de β prise par M. de Prony,

$$\beta = 0,0034162.$$

Si l'on introduit le diamètre $D = 2R$ pour comparer notre résultat avec une formule de M. de Caligny, on aura

$$\alpha = \frac{0,027328}{D},$$

ainsi tant que αh ou

$$0,027328 \frac{h}{D},$$

sera petit devant l'unité, on pourra prendre

$$\frac{x'}{h} = \frac{2}{3} \alpha h = 0,0182 \frac{h}{D} = \frac{1}{55} \frac{h}{D}.$$

Cette valeur de x' sera un peu grande, puisque nous avons négligé le terme négatif $-\alpha h$ qui détermine le signe du reste de la série.

Cette valeur de x' diffère peu de celle que M. de Caligny a donnée, car sa formule est

$$\frac{h - x'}{h} = \frac{1}{1 + \frac{1}{60} \frac{h}{D}},$$

ce qui revient à très peu près à poser

$$\frac{x'}{h} = \frac{1}{60}\,\frac{h}{D}.$$

Comme notre valeur de x' est un peu trop grande, il n'est pas étonnant que M. de Caligny ait trouvé par expérience $\frac{1}{60}$ au lieu de $\frac{1}{51}$, que nous a donné le calcul pour le coefficient constant de $\frac{h}{D}$.

Revenons maintenant à la recherche du mouvement pendant le versement de l'eau par l'orifice supérieur. Nous supposerons que le liquide arrivé à la bouche de sortie en F reste dans un tube sensiblement horizontal, d'où une très légère pente peut le faire sortir une fois que l'oscillation ascendante est terminée : cette manière de considérer le mouvement diffère très peu de celle qu'il faudrait prendre, c'est-à-dire de celle où l'on supposerait que l'eau sort par un orifice en F pour tomber dans un réservoir très peu en dessous ; elle donne plus de facilité pour l'équation des forces vives. En désignant par x la longueur de la colonne fluide sortie à un instant quelconque par l'orifice F, par v_0 la vitesse au commencement du versement ; l'équation des forces vives devient

$$\pi R^2 (l+h+\eta+x)\frac{v^2}{2g} - \pi R^2 (l+h+\eta)\frac{v_0^2}{2g} = -\pi R^2 x\eta - 4\pi R\,(l+h+\eta)\int\beta\,\frac{v^2}{2g}\,dx.$$

Nous poserons pour abréger

$$l + h + \eta = L \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{2g} = z;$$

on aura, en divisant par πR^2,

$$(L + x)z - Lz_0 + \frac{4\beta}{R} Lzdx + \eta x = 0.$$

En différentiant l'équation ci-dessus, on trouve

$$(L + x)\,dz + zdx + \frac{2\beta}{R} Lzdx + \eta dx = 0,$$

ou en posant

$$\frac{4\beta}{R} = \alpha,$$

$$(L + x)\,dz + (1 + \alpha L)\,z\,dx = -\,\eta\,dx.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $(L + x)^{\alpha L}$, on aura

$$(L + x)^{1+\alpha L}\,dz + (1 + \alpha L)(L + x)^{\alpha L}\,z\,dx = -\,\eta\,(L + x)^{\alpha L}\,dx.$$

Les deux membres sont des différentielles exactes; en les intégrant, on trouve

$$(L + x)^{1+\alpha L}\,z = -\,\eta\,\frac{(L + x)^{1+\alpha L}}{1 + \alpha L} + C,$$

ou bien

$$(L + x)^{1+\alpha L}\,[\eta + z(1 + \alpha L)] = C.$$

On déterminera C par la condition que pour $x = 0$ on ait $z = z_0$; cette valeur z_0 étant celle de $\frac{y_0}{L}$, dans le problème précédent.

On aura donc

$$\frac{z(1 + \alpha L) + \eta}{z_0(1 + \alpha L) + \eta} = \left(\frac{L}{L + x}\right)^{1+\alpha L}.$$

La valeur de x qui répond à $z = 0$, sera la longueur de la colonne qui sortira par l'orifice supérieur en F. En désignant cette longueur par $x_{,}$, on aura

$$\left(1 + \frac{x_{,}}{L}\right)^{1+\alpha L} = \frac{z_0}{\eta}(1 + \alpha L) + 1,$$

d'où

$$\frac{x_{,}}{L} = \left[\frac{z_0}{\eta}(1 + \alpha L) + 1\right]^{\frac{1}{1+\alpha L}} - 1.$$

On voit que si $\alpha = 0$, on retombe sur

$$\frac{x_{,}}{L} = \frac{z_0}{\eta},$$

ou

$$\eta x_{,} = L z_0 = y_0,$$

résultat qu'il est facile de vérifier directement.

Si L est très grand, on peut remplacer la valeur de x_1 par la suivante

$$x_1 = \log \frac{\left[1 + \frac{y_0}{\eta}\left(\alpha + \frac{1}{L}\right)\right]}{\alpha + \frac{1}{L}}.$$

Pour avoir maintenant le travail perdu en frottement pendant la période de mouvement que nous venons de considérer, il faudra calculer l'intégrale

$$\pi R^2 \int \alpha L y dx.$$

Cette expression s'obtient simplement en remarquant qu'on a, entre les limites o et x_1,

$$\pi R^2 \alpha L \int z dx = \pi R^2 (y_0 - x_1 \eta).$$

Si l'on veut maintenant la perte totale pour les deux périodes de mouvement précédentes, c'est-à-dire pour l'ascension dans le tube et le versement, on ajoutera à l'expression ci-dessus celle qui donne la perte pour l'ascension, ce qui donnera

$$\pi R^2 \left(\frac{h^2 - \eta^2}{2} - \eta x_1\right).$$

Il nous reste à calculer maintenant les pertes par frottements pendant que le tube d'ascension se vide, et que la colonne de liquide de E en F passe dans le bassin inférieur.

En négligeant la force vive de l'eau une fois qu'elle est arrivée dans le réservoir inférieur, comme nous avons négligé dans l'oscillation ascendante celle du liquide dans le réservoir supérieur, nous aurons les mêmes formules pour l'oscillation de décharge que pour l'oscillation ascendante.

Pour que le tube d'ascension se vide en totalité jusqu'en E, il faudra qu'il y ait entre les hauteurs BE et BF, c'est-à-dire h—H et $H + \eta$, les relations que les formules de l'oscillation ascendante nous ont données pour $h - x'$ et h. Ainsi h et x' devront être remplacés par

$$H + \eta \quad \text{et} \quad 2H + \eta - h.$$

En négligeant le terme en ax' devant l'unité, on a trouvé

$$x' = \frac{(1 + \alpha h)\, e^{-2\alpha h} + \alpha h - 1}{\alpha[1 - (1 + \alpha h)]\, e^{-2\alpha h}};$$

on devra changer, dans cette expression,

$$h \text{ en } \mathrm{H} + \eta \text{ et } x' \text{ en } 2\mathrm{H} + \eta - h.$$

En posant, pour abréger, $\mathrm{H} + \eta = h'$, on aura

$$h = 2\mathrm{H} + \eta - \left\{\frac{(1 + \alpha h')\, e^{-2\alpha h'} + \alpha h' - 1}{\alpha[1 - (1 + \alpha h')]\, e^{-2\alpha h'}}\right\}.$$

A cette équation on joindra celle qui établit un rapport entre le volume élevé et celui qui s'écoule dans le bassin inférieur, c'est-à-dire

$$\frac{x_1}{h + \eta} = m,$$

ce qui fera pour deuxième relation entre H, η et h,

$$\mathrm{L}\left\{(1 + \alpha \mathrm{L})\left[\frac{1 - \alpha\eta - (1 + \alpha h)\, e^{-\alpha(h+\eta)}}{\alpha^2}\right] + 1\right\}^{\frac{1}{1 + \alpha h}} - \mathrm{L} = m(h + \eta)$$

Mais on sait déjà que

$$h = 2\mathrm{H} + \eta - \frac{(1 - \alpha h')\, e^{-2\alpha h'} + \alpha h' - 1}{\alpha[1 - (1 + \alpha h')\, e^{-2\alpha h'}]}.$$

On aura donc ainsi deux équations entre H, η, h et m, au moyen desquelles H et m étant donnés, on obtiendra η et h. On pourra encore se donner H et η, et en conclure h et m, ce qui sera le problème le plus simple pour les calculs, puisqu'en se servant de la première des deux dernières équations, on a immédiatement h, et que l'autre équation donne aussi m immédiatement.

La perte par le frottement pendant une oscillation complète a été exprimée par

$$\pi \mathrm{R}^2 \left(h - \frac{x'}{2}\right) x'.$$

Pour qu'elle s'applique à l'oscillation de décharge, il suffira de remplacer, comme nous venons de le faire, h par $H + \eta$, et x' par $2H + \eta - h$.

Cette perte sera donc

$$\pi R^2 \left(\frac{h + \eta}{2}\right)(2H + \eta - h).$$

Ainsi, la perte totale pendant toute la période du mouvement de la machine est

$$\pi R^2 \left\{\frac{h^2 - \eta^2}{2} - \eta x' + (h + \eta)\left[H - \frac{(h - \eta)}{2}\right]\right\},$$

ou bien en réduisant

$$\pi R^2 \left[H(h + \eta) - \eta x_1\right].$$

Dans cette expression x_1 est déterminé par l'équation

$$x_1 = L\left[\frac{y_0}{Ly}(1 + \alpha L) + 1\right]^{\frac{1}{1+\alpha L}} - L,$$

la force vive y_0, étant

$$y_0 = \frac{1 - \alpha\eta - (1 + \alpha h)e^{-\alpha(h+\eta)}}{\alpha^2}.$$

Le rapport entre le travail utile et le travail total sera

$$\frac{\eta x_1}{H(h + \eta)}.$$

D'après la valeur de x_1 qui est

$$x_1 = L\left\{\left[\frac{1 - \alpha\eta - (1 + \alpha h)e^{-\alpha(h+\eta)}}{L\alpha^2\eta}\right](1 + \alpha L) + 1\right\}^{\frac{1}{1+\alpha L}} - L,$$

et dans laquelle on a

$$h = 2H + \eta - \frac{[1 + \alpha(H + \eta)]e^{-2\alpha(H+\eta)} + \alpha(H + \eta) - 1}{\alpha[1 - (1 + \alpha)(H + \eta)e^{-2\alpha(H+\eta)}]},$$

on voit que le rapport ci-dessus est susceptible d'un maximum; car si η est très grand, x_1 devient nul, et si η devient zéro, ce rapport devient zéro aussi.

Pour avoir la perte inhérente seulement à l'élévation de l'eau ; il faut retrancher de la perte ci-dessus, celle qui serait nécessaire pour conduire le volume $\pi R^2(x_1 + h + \eta)$ à la distance l dans le temps d'une oscillation, et le volume $\pi R^2(h + \eta)$ à la distance l'' également dans le même temps, en se servant de tuyaux de même diamètre.

Il y aurait impossibilité à calculer les durées des oscillations en ayant égard au frottement, mais on pourra par approximation les calculer, en négligeant les frottements.

On sait, par la théorie du mouvement du pendule, en ayant égard à la résistance de l'air qui agit comme les frottements dans notre question que cette résistance n'altère pas sensiblement la durée des oscillations totales quand elles sont très petites, c'est-à-dire quand les équations qui les déterminent coïncident avec celles des oscillations dont nous nous occupons.

La durée du versement que nous avons appelée t', est exprimée par

$$t' = \sqrt{\frac{l+h+\eta}{g}}\left(\sqrt{\frac{h^2-\eta^2-\sqrt{h^2-\eta^2-2\eta x_1}}{\eta}}\right):$$

on prendra avec ce temps ceux des deux autres périodes de l'oscillation, savoir

$$t = \sqrt{\frac{l+h}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\eta}{h}\right)\right],$$

et

$$t'' = \pi\sqrt{\frac{l'' + \frac{h+\eta}{2}}{g}}.$$

Ainsi, on prendra le temps $t + t' + t''$ pour la durée d'une oscillation totale pendant laquelle la machine amène les volumes exprimées précédemment.

La vitesse que devrait prendre l'eau dans le tuyau pour que le même débit s'opérât étant assez petite, on ne peut pas ici négliger le terme de la résistance qui dépend de la première puissance de la vitesse. Le coefficient de ce terme étant représenté par a, on a

$$a = 0{,}00017$$

et

$$\frac{a}{g} = 0{,}00001735.$$

La vitesse pour amener le volume $\pi R^2(x_1 + h + \eta)$ est

$$\frac{(x_1 + h + \eta)}{(t + t' + t'')},$$

et pour le volume $\pi R^2 (h + \eta)$, elle est

$$\frac{h + \eta}{(t + t' + t'')}.$$

Ainsi, la perte en frottements dans un mouvement uniforme sera exprimée par

$$\pi R^2 \frac{8\beta}{2gD}\left[\frac{(x_1+h+\eta)^3\; l + l''(h+\eta)^3}{(t+t'+t'')^2}\right] + \pi R^2 \frac{4a}{gD}\left[\frac{l(x_1+h+\eta)^2 + l''(h+\eta)^2}{(t+t'+t'')^2}\right].$$

Si la machine a deux tubes d'ascension, alors le temps du jeu total ne sera que $t + t'$ et l'on aura, pour la perte inhérente au seul transport de l'eau,

$$\pi R^2 \frac{8\beta^2}{2gD}\left[\frac{l\,(x_1+h+\eta)^3 + l''(h+\eta)^3}{(t+t')^2}\right] + \pi R^2 \frac{4a}{gD}\left[\frac{l(x_1+h+\eta)^2 + l''(h+\eta)^2}{(t+t')}\right].$$

Si l'on désigne par T cette quantité, on aura pour le rapport entre le travail utile employé à élever de l'eau et celui qui a été consommé pour ce seul effet,

$$\frac{\pi R^2 \eta x_1}{\pi R^2 H(\eta + h) - T}.$$

Appliquons ces formules à un exemple.

Supposons qu'on ait

$$\begin{aligned} H &= 2{,}00, \\ \eta &= 2{,}50, \\ D &= 0{,}40, \end{aligned}$$

on trouvera

$$a = \frac{0{,}0272}{D} = 0{,}06800;$$

et par suite, $x_1 = 2^m,94$,

$$nx_1 = 7,35,$$

$$H(n + h) = 16,70.$$

Ainsi, en comptant les frottements dans les tuyaux comme pertes de la machine élévatoire, on aura, pour le rapport entre le travail de la chute et le travail utile de l'élévation de l'eau,

$$\frac{7,35}{16,70} = 0,44;$$

L'effet devient bien plus avantageux si l'on a besoin de faire le transport de l'eau par les tuyaux, et que le travail que ce transport exige doive être déduit de celui de la chute.

Nous supposerons que la machine a deux tubes d'ascension et que la longueur du tuyau de décharge n'est pas assez grande pour que la durée de cette décharge ne dépasse pas celle de l'ascension qui réglera ainsi toute la période d'effet de la machine.

En prenant les longueurs l et l'' de 1000^m, on trouve que

$$t + t' = 33'',$$

et par suite, on arrive à

$$T = \pi R^2 \times 7^m,40.$$

Ainsi le rapport entre l'effet utile et le travail de la chute, déduction faite de celui qui est nécessaire au transport de l'eau, est

$$\frac{7,35}{9,30} = 0,79.$$

La machine élève ainsi un volume égal à $\pi R^2 \times 2,94$ par période ou par seconde

$$\pi R^2 . \frac{2.94}{33} = 0^m,011,$$

et par jour 962^m.

Pour deuxième exemple, supposons qu'on prenne

$$H = 2{,}00,$$
$$n = 2{,}70,$$
$$D = 0{,}50,$$

on trouve

$$\alpha = \frac{0{,}0272}{D} = 0{,}0544$$

et $$h = 6^{m}{,}11.$$

En prenant $$L = 500^{m},$$

on trouve $$x_1 = 3^{m}{,}39,$$

et $$x_1 n = 9{,}15,$$

d'où $$H(h + n) = 17{,}62.$$

Ainsi, le rapport entre l'effet utile et le travail de la chute est

$$\frac{9{,}15}{17{,}62} = 0{,}52.$$

Déduisons maintenant du travail de la chute celui qu'exige le transport de l'eau.

Nous pouvons, sans erreur sensible, prendre le temps de l'ascension de la colonne et du versement comme le temps d'une ascension complète : on aura pour ce temps,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 22'',$$

d'où

$$\frac{h+n}{22} = 0{,}40. \quad \text{et} \quad \frac{h+n+x_1}{22} = 0{,}55.$$

Si le tuyau de décharge a aussi 500^{m} de long et qu'il y ait deux tubes d'ascension, alors on aura pour le travail employé au transport

$$\pi R^2 \frac{8\beta}{2g}\left[l(0{,}55)^3 + l''(0{,}40)^3\right] + \pi R^2 \frac{4a}{gD}\left[l(0{,}55) + l''(0{,}40)\right].$$

En réduisant en nombre, on trouve, en ôtant le facteur πR^2 commun à toutes ces quantités,

$$7,87.$$

Le travail qui reste pour l'élévation est donc

$$9,75.$$

Ainsi le rapport entre l'effet utile et ce travail est

$$\frac{9,15}{9,75} = 0,93.$$

La machine élève par oscillation un volume de	0,66,
par seconde	0,030,
et par jour............................	2592^{mc}.