JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. DELAUNAY

Détermination de l'intégration définie $\int_o^\pi \log\left(1 - 2a\cos x + a^2\right) dx$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 355-356.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__355_0>

Détermination de l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx\,;$$

PAR CH. DELAUNAY,

Élève-ingénieur des Mines.

M. Poisson a donné la valeur de cette intégrale dans son Mémoire sur les intégrales définies, inséré dans le XVII^{e} cahier du *Journal de l'École Polytechnique*: il trouve

1°. Lorsque $a<1$, $\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = 0$;

2°. Lorsque $a>1$, $\int_0^{\pi} \log(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx = \pi\log(a^2)$.

Ces formules se déduisent très simplement du théorème de Côtes, comme nous allons le voir.

Ce théorème consiste dans la relation

$$\left(1-2a\cos\frac{\pi}{2n}+a^2\right)\left(1-2a\cos\frac{3\pi}{2n}+a^2\right)\cdots\left(1-2a\cos\frac{2n-1}{n}\pi+a^2\right)=a^{2n}+1$$

Chaque facteur du premier membre est compris dans la formule générale $1 - 2a\cos.\frac{2i+1}{2n}\pi + a^2$, dans laquelle il faut donner i successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots\, n-1$; pour passer d'un facteur au suivant, il faut augmenter i de l'unité, ou, ce qui revient au même, augmenter l'arc compris sous le signe *cos* de la quantité constante $\omega = \frac{\pi}{n}$. Si nous élevons les deux membres de l'équation à une puissance marquée par ω, nous aurons

$$\left(1-2a\cos\frac{\pi}{2n}+a^2\right)^{\omega}\left(1-2a\cos\frac{3\pi}{2n}+a^2\right)^{\omega}\cdots\left(1-2a\cos\frac{2n-1}{2n}\pi+a^2\right)^{\omega}=(a^{2n}+1)^{\omega}$$

Prenant les logarithmes, il viendra

$$\Sigma\omega \log\left(1 - 2a\cos.\frac{2i+1}{2n}\pi + a^2\right) = \log.(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}}$$

ou bien, en posant $\frac{2i+1}{2}\pi = x$,

$$\Sigma\omega\log(1 - 2a\cos x + a^2) = \log.(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}};$$

le signe Σ indique une somme prise relativement à la variable x, qui croît depuis $x = \frac{\pi}{2n}$ jusqu'à $x = \frac{2n-1}{2n}\pi$ par différences constantes et égales à ω.

Si nous supposons maintenant que n devienne infini, ω deviendra dx, la somme Σ se changera en une intégrale définie prise entre les limites $x = 0$, $x = \pi$, et le premier membre de l'équation deviendra

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx.$$

Pour savoir ce que devient le second membre, il faut distinguer deux cas :

1°. Si $a < 1$, $(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}}$ se réduit à 1, et l'on a

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx = 0;$$

2°. Si $a > 1$, $(a^{2n}+1)^{\frac{\pi}{n}}$ devient $a^{2\pi}$, et l'on a

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx = \pi\log(a^2).$$