JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la Théorie des Équations transcendantes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 337-341.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__337_0>

Sur la Théorie des Équations transcendantes ;

Par J. LIOUVILLE.

Dans une note qu'un élève de M. Plana vient de m'adresser, mais qui n'a pas pu être insérée dans ce Journal, l'auteur arrive à l'équation du troisième degré

$$(1)\qquad \frac{a^2}{2(a^2-v)} + \frac{b^2}{2(b^2-v)} + \frac{c^2}{2(c^2-v)} - 1 = 0,$$

où v est l'inconnue; et, pour démontrer la réalité de ses trois racines, il emploie un artifice que lui a communiqué l'habile professeur de Turin. Cet artifice (qui du reste se présente de lui-même et a été déjà mis en usage dans des cas semblables par d'autres géomètres) consiste à poser $v = p + q\sqrt{-1}$, hypothèse qui réduit la fraction

$$\frac{a^2}{a^2-v}$$

à la forme

$$\frac{a^2(a^2-p+q\sqrt{-1})}{(a^2-p)^2+q^2},$$

en sorte que l'équation (1) se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{a^2(a^2-p)}{(a^2-p)^2+q^2} + \frac{b^2(b^2-p)}{(b^2-p)^2+q^2} + \frac{c^2(c^2-p)}{(c^2-p)^2+q^2} = 2,$$

$$\frac{a^2q}{(a^2-p)^2+q^2} + \frac{b^2q}{(b^2-p)^2+q^2} + \frac{c^2q}{(c^2-p)^2+q^2} = 0;$$

dont la seconde exige évidemment que l'on ait $q = 0$.

Pour prouver la réalité des racines de l'équation (1) dans laquelle nous supposerons $a^2 > b^2 > c^2$ on suit ordinairement une autre marche. En effet, si dans le premier membre de cette équation on pose $v = -a^2$, puis $v = 0$, on obtiendra évidemment deux résultats de signes contraires; et comme entre les limites citées ce premier membre est fonction continue de v, il faut en conclure qu'elles comprennent une racine de la proposée. En désignant par ε une quantité positive infiniment petite, et faisant $v = c^2 + \varepsilon$, $v = b^2 - \varepsilon$, on obtient également deux résultats de signes opposés. Une seconde racine est donc comprise entre c^2 et b^2 : il y en a de même une troisième entre b^2 et a^2. Or l'équation (1) étant du troisième degré ne peut avoir que trois racines : donc elle n'a ni racines égales, ni racines imaginaires, mais bien trois racines réelles, l'une négative, et les deux autres positives.

En général, soient B, A_1, $A_2, \ldots A_n$, a_1, $a_2, \ldots a_n$ des quantités réelles quelconques, telles que l'on ait

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n.$$

Les n racines de l'équation

$$(2) \qquad \frac{A_1^2}{v - a_1} + \frac{A_2^2}{v - a_2} + \ldots + \frac{A_n^2}{v - a_n} - B = 0$$

seront réelles et inégales. Si B est > 0 leurs limites seront a_1 et a_2, a_2 et $a_3, \ldots a_{n-1}$ et a_n, a_n et $+\infty$; si B est < 0 leurs limites seront au contraire $-\infty$ et a_1, a_1 et $a_2, \ldots a_{n-1}$ et a_n. Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire successivement $v = -\infty$, $v = a_1 - \varepsilon$, $v = a_1 + \varepsilon$, $v = a_2 - \varepsilon, \ldots v = \infty$, ε désignant une quantité positive et infiniment petite, puis d'observer les signes que prend pour ces diverses valeurs de v le premier membre de l'équation (2).

Quand on a $B = 0$, l'équation (2) descend au degré $(n - 1)$, et les limites de ses racines sont a_1 et $a_2 \ldots \ldots a_{n-1}$ et a_n.

La méthode précédente, qui est très familière aux géomètres, paraît plus simple que celle indiquée d'abord d'après M. Plana. J'ai donc cherché par quel motif M. Plana s'est trouvé conduit à accorder la préférence au procédé le plus compliqué; et j'ai cru voir que cet illustre géomètre a eu spécialement pour but de donner une méthode susceptible d'être étendue même aux équations transcendantes. Or, celle que je viens d'exposer en dernier lieu paraît difficilement se prêter à une telle extension, puisque, pour s'en servir, on a besoin de savoir *à priori* que l'équation (2) dont on s'occupe n'a jamais plus de n racines quand B est $\gtrless 0$, et plus de $(n-1)$ racines quand $B=0$. C'est donc à l'artifice de M. Plana qu'il conviendra de recourir si le nombre n est infini, c'est-à-dire si l'équation (2) est remplacée par une équation transcendante

$$(3) \qquad \frac{A_1^2}{v-a_1} + \frac{A_2^2}{v-a_2} + \text{etc.} = B,$$

ayant pour premier membre une série convergente. En écrivant cette équation ainsi

$$\Sigma\left(\frac{A_i^2}{v-a_i}\right) = B,$$

et faisant $v=p+q\sqrt{-1}$, on trouve sans difficulté

$$\Sigma\frac{A_i^2(p-a_i-q\sqrt{-1})}{(p-a_i)^2+q^2} = B,$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma\frac{A_i^2(p-a_i)}{(p-a_i)^2+q^2} = B, \quad q\Sigma\frac{A_i^2}{(p-a_i)^2+q^2} = 0,$$

égalités dont la seconde est absurde à moins que l'on n'ait $q=0$, c'est-à-dire à moins que la racine v ne soit supposée réelle. Donc l'équation (3) n'a pas de racines imaginaires. Pour prouver qu'elle n'a pas non plus de racines égales, il suffira d'ailleurs d'observer que l'existence d'une racine réelle multiple entraînerait celle de l'équation absurde

$$\Sigma\frac{A_i^2}{(v-a_i)^2} = 0.$$

La démonstration précédente pourrait encore se faire si l'équation (3) était remplacée par celle-ci

$$(4) \qquad \Sigma\left[\frac{A_i^2}{v-a_i}\right] = f(v),$$

$f(v)$ étant, non plus une simple constante, mais une fonction telle que la quantité $f(p+q\sqrt{-1})$ se réduise à la forme $P+qQ^2\sqrt{-1}$, P et Q désignant des quantités réelles. En effet, si l'on pose $v=p+q\sqrt{-1}$, cette équation (4) se décomposera en deux autres

$$\Sigma \frac{A_i^2 (p-a_i)}{(p-a_i)^2+q^2} = P,$$
$$q\Sigma \frac{A_i^2}{(p-a_i^2)+q^2} = -qQ^2,$$

dont la seconde exige nécessairement que l'on ait $q=0$. Ainsi l'équation (4) n'a jamais dans ce cas de racines imaginaires. En prenant la différentielle des deux membres, on verra qu'elle n'a pas non plus de racines égales : la raison en est que, pour toute valeur réelle de v, la dérivée du premier membre est négative, tandis que celle du second est positive ou nulle, puisqu'elle se déduit évidemment de Q^2 en y remplaçant p par v et q par o. On peut conclure de là que si $\varphi(v)$ est une fonction algébrique ou transcendante décomposable en facteurs simples sous la forme

$$\varphi(v) = A\left(1-\frac{v}{a_1}\right)^{\alpha_1}\left(1-\frac{v}{a_2}\right)^{\alpha_2}\left(1-\frac{v}{a_3}\right)^{\alpha_3}\ldots,$$

où A, a_1, a_2, a_3... désignent des constantes réelles quelconques et α_1, α_2, α_3... des exposants positifs, l'équation

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} = f(v)$$

n'aura ni racines imaginaires, ni racines égales, tant que la fonction $f(v)$ remplira les conditions dont on a parlé ci-dessus. Cela résulte de ce que la fraction $\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}$ est égale à

$$\frac{\alpha_1}{v-a_1} + \frac{\alpha_2}{v-a_2} + \ldots.$$

Posons par exemple $\varphi(v) = \cos v$, puis $f(v)=a$ ou $f(v)=a+b^2v$, a et b étant des constantes réelles : nous formerons ces deux équations

$$\text{tang}\, v = -a, \quad \text{tang}\, v = -a-b^2v,$$

que les géomètres ont déjà considérées et dont les racines sont nécessairement réelles et inégales.

En prenant $f(\nu) = 0$, l'équation

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = f(\nu)$$

se réduit à

$$\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = 0.$$

Quand $\varphi(\nu)$ a la forme indiquée plus haut, l'équation $\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)} = 0$ a donc toutes ses racines réelles et n'a pas de racines égales. De là il est aisé de conclure que l'équation $\varphi'(\nu) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles, quoiqu'elle puisse avoir des racines multiples.

Bien que cette note (qui n'est qu'un développement de l'idée de M. Plana) ajoute très peu de chose ou même n'ajoute rien à ce que l'on connaissait sur la théorie des équations transcendantes, j'ai pensé qu'il pouvait être bon de la publier ici afin d'attirer l'attention des géomètres sur un point de la science qui est à la fois très important et très délicat.