JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

VINCENT

Addition à une précédente Note relative à la résolution des équations numériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 235-243.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__235_0>

Addition à une précédente Note relative à la résolution des équations numériques;

PAR M. VINCENT,

Professeur au Collége royal de Saint-Louis.

I.

Dans un des précédents numéros de ce Journal (*tome Ier, page* 341), j'ai fait voir que le procédé de Lagrange pour la réduction des racines des équations en fraction continue, avait la propriété, indépendamment de toute opération préalable, de séparer les racines réelles inégales. Au reste, la proposition, ainsi énoncée, n'a besoin d'aucune démonstration; la seule chose qu'il fût véritablement nécessaire de prouver, c'est que les racines imaginaires ne sauraient introduire de variations permanentes dans les transformées successives : car cette circonstance, si elle pouvait se présenter dans la résolution d'une équation, exposerait le calculateur à *poursuivre* indéfiniment des racines qui n'existent pas.

Je crois avoir suffisamment établi dans l'endroit cité, que ce reproche fait à la méthode ne serait nullement fondé; mais il en est un autre que l'on pourrait plus justement lui adresser : c'est qu'elle suppose ou paraît supposer inégales toutes les racines réelles; et dès lors, si l'équation a des racines égales, comme l'existence de ces racines entraîne celle d'un pareil nombre de variations qu'il est impossible de séparer, on se trouve, ou du moins peut-on le craindre, dans le cas de douter éternellement si les racines que l'on poursuit sont réelles et égales, ou réelles et inégales mais jusque alors non séparées, ou même enfin imaginaires mais non encore exclues des limites qui leur permettent de communiquer des variations à l'équation et à ses transformées.

A la vérité encore, on peut se délivrer de cette crainte en commençant par décomposer le polynome en d'autres qui n'aient que des facteurs simples. Mais, obligé pour cela de recourir à la méthode ordinaire des racines égales, opération longue et pénible, dont la nature est d'élever continuellement l'ordre des chiffres auxquels le calcul donne lieu, on perd tout le bénéfice de la déduction si simple des transformées successives.

Frappé de cet inconvénient dont je ne me dissimulais pas la gravité, j'ai dû m'occuper de le détruire; et pour cela, j'ai cherché s'il ne serait pas possible d'assigner au nombre des transformées, une limite passé laquelle cessât toute incertitude sur la nature des racines. J'ai reconnu que la question se réduisait à obtenir une formule simple au moyen de laquelle on pût lire comme intuitivement sur l'équation donnée, une limite inférieure des racines réelles, *tant positives que négatives*, de l'équation aux carrés des différences de celles de la proposée.

Or, précisément, M. Cauchy a donné une pareille formule dans le 4e volume de ses *Exercices mathématiques* (*page* 121). Avant de la connaître, j'en avais de mon côté trouvé une, moins simple à la vérité, et moins avantageuse dans la pratique; toutefois, comme sa détermination est fondée sur des considérations que l'on regarde ordinairement comme plus élémentaires, attendu qu'elles sont entièrement indépendantes de la théorie des modules des expressions imaginaires qui n'est pas encore généralement admise, je me hasarderai à la présenter. Au surplus, il est bon de le remarquer, c'est bien moins de telle limite plus ou moins rapprochée qu'il s'agit véritablement ici, que de l'existence absolue d'une limite quelconque, pourvu seulement que l'on soit sûr qu'elle a pour valeur un nombre fini.

II.

Pour parvenir à la limite indiquée, nommons k la plus grande valeur absolue des coefficients de l'équation proposée, supposés entiers, celui du premier terme étant d'ailleurs l'unité; et soient, conformément aux notations ordinaires de la théorie des fonctions symétriques, S_1, S_2, S_3,..., les sommes successives des puissances semblables et entières des racines de l'équation, sommes que nous ne considérons toutefois que dans leur valeur absolue.

D'après la composition des équations qui déterminent ces sommes, on aura dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire en remplaçant, comme je le ferai dans tout ce qui suivra, chacun des coefficients par le plus grand d'entre eux et les affectant tous du même signe; on aura, dis-je, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &< k, \\ S_2 &< (k+1)^2 - 1, \\ S_3 &< (k+1)^3 - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

et en général, on démontre facilement que l'on a l'inégalité

$$S_p < (k+1)^p - 1,$$

formule que l'on peut étendre à toute valeur entière et positive de p, aussi grande que l'on voudra, même supérieure à m, degré de l'équation, et à laquelle je substituerai pour plus de simplicité, la formule suivante

$$S_p < (k+1)^p,$$

qui est vraie *à fortiori*.

Maintenant, en nommant S'_1, S'_2, S'_3,... les sommes des puissances 2e, 4e, 6e,... des différences des racines, on a encore dans le cas le plus défavorable, d'après les équations qui déterminent leurs valeurs,

$$\begin{aligned} S'_1 &< (m+1)(k+1)^2, \\ S'_2 &< (m-1+2^3)(k+1)^4, \\ S'_3 &< (m-1+2^5)(k+1)^6, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et en général,

$$S'_q < (m-1+2^{2q-1})(k+1)^{2q}.$$

Cette formule est également susceptible de simplification; car on a toujours, *pourvu cependant que m soit* > 2, restriction qui est sans inconvénient,

$$m - 1 + 2^{2q-1} < (m+1)^q.$$

En effet, soit $m = 3 + h$; il s'agit de prouver que

$$2 + h + \frac{1}{2}(4)^q < (4+h)^q,$$

ce qui est vrai à la limite où $h = 0$, puisque l'on a

$$2 < \frac{1}{2}(4)^q,$$

et ce qui l'est *à fortiori* quand $h > 0$.

Par suite, la formule générale précédente devient

$$S'_q < (m+1)^q (k+1)^{2q};$$

et l'on en tire sans peine, en désignant par 1, P'_1, P'_2, $P'_3 \ldots$, les coefficients de l'équation aux carrés des différences,

$$\begin{aligned}
P'_1 &< (m+1)(k+2)^2,\\
P'_2 &< (m+1)^2(k+1)^4,\\
P'_3 &< (m+1)^3(k+1)^6,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P'_q &< (m+1)^q(k+1)^{2q}.
\end{aligned}$$

Cela posé, en représentant par n le degré de cette équation, ou faisant $n = \frac{1}{2} m(m-1)$, on aura, pour la limite inférieure des racines, tant négatives que positives, de cette équation, la formule

$$\frac{P'_n}{P'_n + P'_t},$$

dans laquelle il faut prendre P'_n le plus petit possible, P'_t représentant d'ailleurs le plus grand de tous les coefficients précédents.

Or, d'une part, relativement à P'_n, si la forme de l'équation qui le donne ne permet pas de conclure immédiatement qu'il soit entier, cela résulte du moins de la composition connue de ce coefficient (*) ; et, sauf le cas de racines égales, il est au moins égal à 1.

Quant à la limite supérieure de P'_t, elle ne peut dépasser la plus grande valeur de P'_{n-1}, ou $(m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2}$, expression à laquelle on peut substituer sans inconvénient, la limite

$$P'_{n-1} < (m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2} - 1\,;$$

de sorte que l'on a

$$\frac{P'_n}{P'_n + P'_t} > \frac{1}{(m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2}}.$$

Les racines, tant positives que négatives, de l'équation aux carrés des différences, ont donc cette dernière fraction pour limite inférieure.

Le calcul précédent suppose égal à l'unité le coefficient du premier terme de l'équation proposée; dans le cas contraire, en nommant A le premier coefficient, la limite trouvée devra être remplacée par.. $\frac{1}{A^2(m+1)^{n-1}(k+1)^{2n-2}}$, k étant alors le plus grand des coefficients de la transformée que l'on obtiendrait en faisant $x=\frac{y}{A}$ pour faire disparaître le coefficient du premier terme.

Si l'on veut employer au lieu de la limite précédente, celle de M. Cauchy, dont j'ai parlé plus haut, il faudra substituer le nombre 4 au nombre $(m+1)$, ou prendre la fraction

$$\frac{1}{A^2[2(k+1)]^{2n-2}}\,;$$

et comme j'ai supposé $(m+1)$ au moins égal à 4, il s'ensuit

(*) Un terme de la forme $a^p b^p c^p \ldots$ qui se trouverait dans ce coefficient ou dans un autre, devra s'y trouver un nombre de fois égal à celui des permutations que l'on peut faire entre les lettres qui y entrent, ou un multiple de ce nombre de permutations; et cela suffit pour faire disparaître le dénominateur de la formule qui donne la somme des termes de cette forme, et par suite pour rendre entiers les coefficients de l'équation aux carrés des différences, quand ceux de la proposée le sont. Il en serait de même de toute autre équation dont les racines seraient des fonctions symétriques entières quelconques de celles de la proposée.

que la limite de M. Cauchy est plus approchée; et je l'emploierai de préférence. Au reste, comme je l'ai dit, le rapprochement de la limite n'est ici que d'une importance secondaire.

III.

Passons aux conséquences; et supposons que dans la résolution de l'équation en fraction continue, on ait poussé l'opération jusqu'à ce que, nommant p' et q' les dénominateurs de deux réduites consécutives (*Journal de Mathématiques, tome* I, *p.* 343 *et suiv.*), on ait

$$p'q' > A[2(k+1)]^{n-1},$$

ce qui est toujours possible, vu l'accroissement indéfini des termes successifs des réduites.

Alors, en nommant d'abord δ une des différences entre les racines réelles, on aura

$$\delta > \frac{1}{A[2(k+1)]^{n-1}} > \frac{1}{p'q'}.$$

Ainsi, en premier lieu, deux racines réelles différentes ne seront plus comprises entre les deux réduites consécutives (*ibidem*, p. 344).

Secondement, si $2\beta\sqrt{-1}$ est la différence de deux racines imaginaires conjuguées, on aura aussi, dans la même hypothèse,

$$2\beta > \frac{1}{A[2(k+1)]^{n-1}} > \frac{1}{p'q'}.$$

Ainsi encore, la condition nécessaire (*ibidem*, p. 345) pour que les deux racines imaginaires puissent donner lieu à deux variations, n'existera plus.

La conséquence théorique à tirer de ce résultat, est que si le calcul, poussé jusqu'à la limite indiquée, a conservé plusieurs variations, ces variations ne peuvent provenir que de l'existence d'un pareil nombre de racines égales.

Quant à la conséquence pratique, c'est que l'on peut, dans tous les cas, se dispenser du calcul préalable des racines égales, puisque, même quand il existe de pareilles racines dans l'équation, *la méthode* *des transformées*, loin de se trouver pour cela en défaut, *donne* au contraire, *non-seulement les valeurs des racines multiples*, comme celles des racines simples, *mais même leur degré de multiplicité.*

Mais allons plus loin, et tâchons de faire ressortir de cette nouvelle propriété, tous les avantages qui peuvent en rejaillir sur la méthode pratique, et contribuer à la simplifier.

La chose qui paraît le plus importer pour cela, est de voir comment on pourra étendre à ce cas des racines égales, l'application de la méthode de Newton, telle que nous l'avons employée aux pages 353 et suivantes du volume cité.

Or, en raisonnant comme nous l'avons fait en cet endroit, il est aisé de reconnaître que si, dans une transformée en y qui aurait, par exemple, *deux* racines égales, on fait $y = g + h$, et que l'on détermine par le tâtonnement, un ou plusieurs chiffres décimaux de la valeur de h, on parviendra sans difficulté à faire passer les deux variations de cette transformée, entre les trois premiers termes ordonnés suivant les puissances ascendantes de h.

Cela fait, on pourra mettre l'équation en h sous la forme

$$f''(g)h^2 + 2f'(g)h + 2f(g) + \frac{h^3}{3}\left[f'''(g) + f^{\text{iv}}(g)\frac{h}{4} + \ldots\right] = 0;$$

d'où, résolvant comme pour le second degré,

$$h = \frac{-f'(g) \pm \sqrt{[f'(g)]^2 - 2f(g).f''(g) - \frac{h^3}{3}f''(g)[f'''(g) + \ldots.]}}{f''(g)}.$$

Ici, en supposant que g soit une valeur suffisamment approchée de y, et par suite que h soit suffisamment petit, on pourra négliger sous le radical le cube et les puissances supérieures de cette inconnue. Il restera alors

$$h = \frac{-f'(g) \pm \sqrt{[f'(g)]^2 - 2.f(g).f''(g)}}{f''(g)};$$

et comme h doit avoir deux valeurs égales, il s'ensuit que l'on aura approximativement

$$[f'(g)]^2 - 2.f(g).f''(g) = 0;$$

c'est-à-dire autrement, que les trois premiers termes de l'équation formeront alors approximativement un carré parfait en h; d'où résultera pour cette quantité, la valeur positive

$$h = -\frac{f'(g)}{f''(g)}.$$

Ce résultat était facile à prévoir; et l'on peut évidemment le généraliser. C'est-à-dire, 1° que si une transformée qui a dépassé le point de séparation des racines, présente un nombre n de variations, elle a nécessairement n racines égales; et 2° que si l'on fait passer ces n variations aux $(n+1)$ premiers termes ordonnés suivant les puissances ascendantes, comme on le peut toujours par le même procédé, ces $(n+1)$ premiers termes formeront approximativement la quantité

$$\frac{\{f^{(n-1)}(g)+f^{(n)}(g).h\}^n}{1.2.3\ldots n\{f^{(n-1)}(g)\}^{n-1}};$$

d'où

$$h = -\frac{f^{(n-1)}g}{f^{(n)}g}.$$

Il y a néanmoins un inconvénient à considérer la question sous le point de vue précédent; car on a commis deux sortes d'erreurs, l'une en négligeant la puissance $(n+1)^e$ ainsi que les puissances supérieures; l'autre en considérant les $(n+1)$ premiers termes comme formant une puissance n^e parfaite; et dès lors, il devient difficile d'évaluer le degré de chaque approximation, ou le nombre de chiffres exacts de la valeur de h.

C'est pourquoi, aussitôt que l'on aura reconnu, par le moyen indiqué, l'égalité d'un nombre n de racines poursuivies, on substituera immédiatement à la dernière transformée, sa $(n-1)^e$ dérivée; et l'opération se trouvant ainsi ramenée à la recherche d'une racine simple, on pourra suivre le procédé du *numéro* 6, p. 352, qui reproduira alors, d'une manière plus rigoureuse, la valeur précédente de h.

Il nous semble que la méthode des transformées, ainsi modifiée et étendue, acquiert un degré de précision et de rigueur qui ne le cède plus à sa simplicité. Le seul reproche que l'on pût encore être tenté de lui faire, serait la petitesse des limites données plus haut, même de celle que nous avons empruntée à M. Cauchy, petitesse d'où résulterait, dans le cas de racines égales, un nombre fini à la vérité, mais toujours plus ou moins considérable de transformations nécessaires avant que l'on pût compter avec certitude sur la réalité de ces racines. Il pourrait donc rester quelques recherches à faire sous ce rapport : car les limites que nous avons employées sont considérablement exagérées en petitesse; mais de cette exagération même il résulte que le doute relatif à la nature des racines sera toujours résolu beaucoup plus tôt que la limite ne semble l'indiquer. Ce point de vue est du reste le seul sous lequel la méthode des transformées (nous ne disons pas la résolution des équations) nous paraisse désormais susceptible de perfectionnement. Nous nous bornerons à indiquer pour cela un moyen simple en théorie, et que l'on pourra employer quand l'importance de la question le méritera : c'est le calcul, au moyen des fonctions symétriques, du dernier terme de l'équation aux carrés des différences, et la division, par la racine carrée de ce dernier terme, du dénominateur de la limite de la plus petite différence.

Observons encore, en terminant, que pour pouvoir former de la petitesse de cette limite, une objection fondée contre la méthode des transformées, il faudrait commencer par prouver que les calculs préparatoires employés par toute autre méthode pour assigner *à priori* le nombre et les limites des racines réelles, sont moins longs et moins compliqués que ceux mêmes qu'exige la méthode des transformées avant que l'on ne soit parvenu au point de séparation des diverses sortes de racines. Mais c'est ce que l'on ne saurait faire; car les deux sortes de calculs tirent leur complication des mêmes causes : l'élévation du degré de l'équation, et la grandeur de ses coefficients. Il nous serait facile de faire voir au contraire, par de nombreux exemples, que c'est principalement sous le rapport même de la rapidité, que la méthode des transformées ne le cède à aucune autre. Au reste, nous en renvoyons tout le mérite à ses auteurs, MM. Budan et Fourier; le seul qu'il nous fût peut-être permis de revendiquer, serait d'en avoir mieux fixé les bases.
