JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 56-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__56_0>

MÉMOIRE

Sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients;

PAR J. LIOUVILLE.

(Lu à l'Académie des Sciences de Paris, le 8 juin 1835.)

INTRODUCTION.

Les six opérations fondamentales de l'arithmétique, savoir, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances entières et positives, l'extraction des racines, lorsqu'on les applique à de simples lettres, représentant des nombres tout-à-fait indéterminés, donnent naissance aux fonctions algébriques les plus élémentaires; mais elles sont loin de comprendre toutes les quantités renfermées sous cette dernière dénomination. En effet le mot *fonction algébrique*, dans le sens que les géomètres lui attribuent aujourd'hui, s'applique à toute quantité déterminée par une équation d'un degré quelconque, dont les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante. L'équation à laquelle satisfait une fonction de cette espèce prend à son tour le nom d'équation algébrique. Or on sait que les équations algébriques se partagent en deux grandes classes. Quelques-unes, telles que les équations des quatre premiers degrés, sont résolubles par radicaux, ou, autrement dit, la fonction dont elles déterminent la valeur, peut être écrite en employant un nombre limité de fois les signes $+$, $-$, etc., adoptés par les géomètres comme indiquant les six opérations arithmétiques dont j'ai parlé plus haut. Mais dès qu'on s'élève à l'équation complète du cinquième degré, et *à fortiori* aux équations complètes de degré supérieur, il arrive que leur résolution générale est impossible à moins qu'on ne veuille recourir aux séries et aux intégrales définies; d'où il faut conclure que les fonctions algébriques sont de deux sortes, les unes exprimables et les autres non exprimables par des combinaisons de radicaux. Le problème si fameux de la résolution des équations algébriques consiste à distinguer ces deux genres de fonctions dans chaque cas particulier : on est loin de l'avoir résolu, et ce n'est même que par des démonstrations très délicates et très compliquées, que l'on est parvenu à établir l'impossibilité des racines de l'équation du cinquième degré en quantités purement radicales.

Si nous considérons actuellement, outre les fonctions algébriques, les exponentielles et les logarithmes, ce qui comprend, comme cas particuliers, d'une part les arcs de cercle et leurs sinus, d'autre part les puissances à base variable, dont l'exposant est irrationnel, imaginaire ou variable, en combinant à notre gré les signes relatifs à ces opérations algébriques ou transcendantes, nous obtiendrons toutes les fonctions finies explicites, fonctions dont le caractère propre consiste d'après cela, en ce qu'on peut en écrire la valeur à l'aide d'un nombre limité d'opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques.

Une fonction finie implicite, sera au contraire une fonction déterminée par une ou plusieurs équations finies, non résolubles explicitement.

Mais ici l'on voit naître une question semblable à celle qui s'est présentée tout-à-l'heure, quand nous parlions des fonctions algébriques. En effet, on a cru d'abord que toutes les équations algébriques se résoudraient à l'aide de radicaux; et, d'après cette idée, on a cherché long-temps à en obtenir les racines sous la forme indiquée. Les efforts réitérés des plus grands géomètres n'ayant conduit à aucun résultat général, on a été porté ensuite à soupçonner que le problème proposé était impossible, au moins pour l'équation complète du cinquième degré et des degrés supérieurs, et on est parvenu à établir en toute rigueur cette impossibilité : semblablement, quand il s'agit d'équations transcendantes, il est naturel de chercher d'abord à les résoudre, en exprimant les inconnues par des fonctions finies explicites des coefficients, et comme on ne peut pas y réussir dans la plupart des cas, il faut en second lieu prouver que les valeurs des inconnues ne sont pas exprimables par cette sorte de fonctions. Dès-lors on aura épuisé complétement la question dans le sens où elle était proposée; car tout ce que peut faire une méthode, c'est de conduire à la solution, quand cette solution est possible, ou d'en prouver sans équivoque l'impossibilité.

Dans le mémoire que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie, je suis bien loin d'avoir envisagé la chose sous un point de vue aussi étendu. Je me suis contenté de traiter certaines équations particulières, et par un procédé direct et uniforme, qu'il serait facile de présenter d'une manière abstraite et générale, je suis parvenu soit à les résoudre, soit à démontrer l'impossibilité de leurs racines en fonction finie explicite des coefficients.

J'ai considéré, par exemple, l'équation qu'on obtient en égalant le logarithme de l'inconnue au produit de cette inconnue par un paramètre indéterminé : la racine de l'équation ainsi formée n'est point exprimable explicitement sous forme finie, en fonction de ce paramètre indéterminé : on ne peut l'obtenir qu'en série ou en intégrale définie. La même chose arrive dans la plupart des cas, et spécialement pour l'équation de laquelle dépend en Astronomie le problème de Képler ou le calcul de l'anomalie excentrique en fonction de l'anomalie moyenne : l'anomalie excentrique n'est donc point exprimable par une fonction finie explicite de l'anomalie moyenne. Cela s'accorde avec le théorème énoncé par Lambert dans les Mémoires de Berlin (année 1767); mais il était plus facile d'énoncer ce théorème que de le démontrer.

Dans certains exemples choisis, que je traite en détail, l'équation transcendante proposée est résoluble, et ma méthode en fait trouver la racine. Le principe de cette méthode paraît avoir la généralité désirable: toutefois pour qu'on pût donner une théorie complète de la résolution des équations transcendantes en quantités finies explicites, il faudrait que l'on eût étudié avec plus de soin qu'on ne l'a fait jusqu'ici, la théorie des équations différentielles ordinaires. Il faudrait surtout, qu'étant donnée une équation différentielle d'un ordre quelconque, on pût décider par une règle certaine, si elle a ou n'a pas une intégrale algébrique, et quelle est la valeur exacte de cette intégrale, lorsqu'on en a démontré l'existence.

L'analyse établit un rapport singulier entre la détermination, sous forme finie explicite, des racines des équations transcendantes, et la détermination, sous cette même forme, des intégrales indéfinies des fonctions d'une seule variable. Non-seulement, comme je viens de l'expliquer, la difficulté principale de la théorie consiste dans l'un et l'autre cas à déterminer les solutions algébriques de certaines équations différentielles; mais l'analogie entre ces deux classes de questions se soutient, pour ainsi dire, jusque dans les derniers détails, tellement que la méthode dont je me sers dans cet écrit peut être regardée comme une simple extension ou mieux comme une application nouvelle de la méthode dont j'ai fait usage dans le vingt-troisième cahier du Journal de l'École Polytechnique, pour découvrir la forme dont l'intégrale d'une fonction algébrique donnée est susceptible, lorsqu'on peut en obtenir la valeur en quantités finies explicites.

Dans le Journal de l'École Polytechnique, comme dans le présent mémoire, et dans plusieurs autres relatifs, soit à l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes, soit à l'impossibilité des fonctions elliptiques sous forme finie, soit à l'intégration, sous forme finie, des équations différentielles linéaires, on fait un continuel usage de la classification des transcendantes, dont je crois avoir le premier montré l'utilité. D'après cette classification, une fonction transcendante de première espèce, est celle où les signes relatifs aux opérations transcendantes, portent sur de simples fonctions algébriques, tandis que dans une transcendante de $n^{ième}$ espèce les signes dont il s'agit peuvent porter sur toutes les quantités d'espèce inférieure. Cette classification paraît d'abord bien peu de chose, et néanmoins je ne vois pas qu'il soit possible de s'en passer dans les recherches relatives à l'intégration des formules différentielles et à la résolution des équations sous forme finie explicite. En rédigeant donc ce nouvel écrit, j'ai dû profiter de l'occasion pour exposer dans le plus grand détail les principes sur lesquels cette classification est fondée, car jusqu'ici je m'étais pour ainsi dire contenté de l'indiquer, vu qu'il n'était pas nécessaire de l'approfondir davantage dans les questions dont je m'occupais alors.

Voici l'énoncé succinct des problèmes qu'il a fallu résoudre pour éclaircir entièrement les idées à ce sujet.

D'abord je passe en revue les diverses fonctions simples dont la combinaison dans un ordre quelconque produit toutes les quantités finies explicites. Ces fonctions simples sont de trois sortes, algébriques, logarithmiques, exponentielles : le logarithme d'une variable x, savoir $\log x$, et l'exponentielle la plus simple e^x ne peuvent en aucune manière s'écrire en indiquant sur la variable x un nombre limité d'opérations algébriques. Ce théorème était connu depuis long-temps; mais on avait coutume de le démontrer en s'appuyant sur la nature du développement des fonctions algébriques en série. Après l'avoir etabli d'une manière entièrement rigoureuse, je passe à des propositions plus générales : je fais voir, par exemple, que la fonction $\log x$ ne peut être écrite, sous forme finie explicite, par aucune combinaison quelle qu'elle soit des signes exponentiels et des signes algébriques, et de même la fonction e^x n'est équivalente à aucune fonction purement algébrique et logarithmique. Il résulte de là que les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques sont essentiellement différentes entre elles, en sorte que les signes dont nous faisons usage dans notre classification des transcendantes sont réellement réduits au moindre nombre possible.

Nous avons dit tout-à-l'heure qu'une fonction transcendante de seconde espèce était celle où les signes exponentiels et logarithmiques se trouvaient appliqués sur des transcendantes de première espèce; mais comme, dans certains cas, cette complication de la fonction n'est qu'apparente, puisque le logarithme d'une exponentielle qui semble, par exemple, appartenir, d'après cette définition, à la seconde espèce, n'est en réalité qu'une simple fonction algébrique, il est visible qu'avant de classer la fonction dont on s'occupe, il faut d'abord en supposer l'expression simplifiée autant que possible. Aussi dans un des paragraphes de notre mémoire, traitons-nous cette question : *Étant donnée une fonction finie explicite de x, comment pourra-t-on reconnaître d'une manière certaine, à quelle espèce cette fonction appartient ?*

La méthode dont nous proposons de faire usage pour résoudre le problème dont on vient d'écrire l'énoncé nous prouve en outre qu'il existe (quelque grand que soit le nombre n) des transcendantes de $n^{ième}$ espèce, irréductibles à une espèce inférieure; en effet, si l'on considère les quantités successives $\log \log x$, $\log \log \log x$, etc., on les trouve de seconde, de troisième espèce, etc., sans que jamais elles puissent s'abaisser.

L'existence des fonctions finies, véritablement *implicites*, se prouve d'une manière semblable, en faisant voir que certaines équations finies ne se résolvent pas explicitement, et c'est ainsi que je me trouve ramené au problème de la résolution des équations dont j'ai parlé plus haut.

Enfin, je m'occupe des fonctions diverses que l'on rencontre dans les éléments : toutes ces fonctions peuvent être écrites sous forme finie explicite : par conséquent ma classification leur est immédiatement applicable. J'ai surtout étudié avec soin la quantité formée en élevant une base variable à une puissance irrationnelle, et j'ai fait voir que cette quantité doit être rangée parmi les transcendantes de seconde espèce, tandis qu'elle se réduirait à une simple expression algébrique, si l'exposant était rationnel.

Les propositions contenues dans mon Mémoire ont beaucoup d'analogie avec celles dont on s'occupe dans la théorie des nombres; mais tandis que, dans cette dernière théorie, on considère spécialement les valeurs numériques des fonctions, nous nous attachons au contraire à leur forme analytique par rapport à certaines variables x, y, etc., sans faire en général aucune attention à la nature des coefficients constants que ces fonctions renferment. La considération des valeurs successives que nos fonctions peuvent prendre, lorsqu'on fait croître x, y, etc., d'une manière continue, nous est d'une grande utilité dans nos calculs et multiplie beaucoup les moyens de transformation. Néanmoins les géomètres, qui voudront se livrer à des recherches semblables aux nôtres, verront que la matière est encore très délicate, et qu'il faut partout un soin extrême pour donner aux raisonnements cette rigueur absolue, indispensable dans un pareil sujet.

§ Ier.

Des fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles.

1. Dans les recherches de calcul intégral, lorsqu'il s'agit d'obtenir des solutions exprimées sous forme finie, on a souvent besoin de la classification des transcendantes, dont j'ai d'abord montré l'usage au paragraphe Ier de mon Mémoire sur les fonctions elliptiques (*). Aujourd'hui je me propose de considérer cette classification en elle-même, indépendamment des applications dont elle est susceptible. Je serai ainsi conduit à traiter plusieurs questions incidentes qui se présentent naturellement et dont il était bon de donner une solution exacte. L'analyse employée dans mon travail est très simple et surtout très uniforme. Je me suis attaché à donner aux raisonnements cette rigueur absolue sans laquelle les théorèmes du genre de ceux que je démontre ici deviennent insignifiants; et peut-être sous ce rapport, ai-je droit d'espérer un moment d'attention de la part des géomètres.

Avant d'entrer en matière, je poserai quelques définitions assez généralement connues, mais qu'il sera utile de rappeler pour bannir toute équivoque.

Un polynome $A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^\mu$, dans lequel μ désigne un nombre entier positif, et où les coefficients A, B, C,...H, sont des quantités constantes, est ce qu'on nomme une fonction entière de x du degré μ.

On sait qu'un pareil polynome peut toujours se décomposer en facteurs simples, sous la forme

$$H(x-a)^m (x-b)^n \ldots (x-c)^p,$$

m, n,...p, désignant des nombres entiers positifs, et a, b,...c, les racines inégales de l'équation

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^\mu = 0.$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXIII, page 42.

Une fonction est rationnelle, quand on l'obtient en divisant l'un par l'autre deux polynomes entiers U, V.

Toute fonction rationnelle $\frac{U}{V}$ ou X pourra donc se mettre sous la forme

$$X = M(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma},$$

M désignant une constante; α, β, ...γ, des nombres entiers positifs ou négatifs, et a, b, ...c, les racines inégales des équations $U=0$, $V=0$.

Si, dans un même calcul, on doit employer à la fois deux fonctions rationnelles $X=\frac{U}{V}$, $Y=\frac{W}{T}$, on nommera a, b, ...c, les diverses racines inégales des quatre équations $U=0$, $V=0$, $W=0$, $T=0$, et l'on écrira

$$X = M(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma},$$
$$Y = N(x-a)^{\alpha'}(x-b)^{\beta'}\ldots(x-c)^{\gamma'},$$

M et N étant des constantes. Mais alors α, β, ... γ, α', β', ... γ', seront regardés comme représentant des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls : on aura par exemple $\alpha=0$, si le facteur $x-a$ ne doit se trouver ni au numérateur, ni au dénominateur de X.

Je nomme fonction algébrique de x toute fonction u qui peut être regardée comme la racine d'une équation de la forme

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = 0,$$

n étant un nombre entier positif, et les lettres P, Q, ...R, S, représentant des fonctions entières de x. Il importe peu que l'équation soit ou non résoluble par radicaux. Si donc on dénote par $\varpi(x)$ la racine de cette équation, la quantité $u=\varpi(x)$ représentera une fonction algébrique quelconque, et au moyen de ce signe $\varpi(x)$ toutes les fonctions algébriques pourront être regardées comme explicites.

Ces définitions s'étendent d'elles-mêmes aux fonctions de plusieurs variables. En les rapprochant des théories exposées dans les livres élémentaires, on voit que l'on doit regarder comme algébriques toutes les fonctions où la variable x est engagée avec des constantes seulement par addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances entières et positives, extraction de racines, c'est-à-dire toutes les fonctions que l'on écrit sous forme finie, à l'aide des simples signes des six opérations fondamentales que je viens d'indiquer; mais la réciproque n'est pas vraie, par la raison qu'en se bornant à ces mêmes signes, les racines de la plupart des équations de la forme

$$Pu^{\mu} + Qu^{\mu-1} + \ldots + Ru + S = 0,$$

seraient impossibles en quantités finies : en effet, si les équations des quatre premiers degrés sont résolubles par radicaux, l'équation générale du cinquième degré, n'est pas résoluble de cette manière.

De là deux classes de fonctions algébriques, les unes exprimables, et les autres non exprimables par des radicaux; mais, dans les recherches de calcul intégral, ces deux classes de fonctions jouissent à peu près des mêmes propriétés, et il y a rarement de l'avantage à les distinguer dans le discours, et à les représenter par des notations différentes.

2. Non-seulement les fonctions algébriques se partagent en deux grandes classes; mais chacune de ces classes peut encore se subdiviser en espèces distinctes. En considérant les fonctions exprimables par radicaux, j'ai proposé (*) de les nommer *irrationnelles de première espèce* lorsque les radicaux dont elles se composent portent sur des fonctions rationnelles, *irrationnelles de seconde espèce* quand ces mêmes radicaux portent sur des quantités rationnelles ou sur des irrationnelles de première espèce, et ainsi de suite. Par exemple, les trois fonctions irrationnelles que voici $\sqrt{x}$, $x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $\sqrt[3]{x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$, appartiennent respectivement à la première, à la seconde et à la troisième espèce. Il est aisé de comprendre que la forme la plus générale d'une irrationnelle de première espèce se compose d'une partie rationnelle et d'un nombre quelconque de radicaux ajoutés entre eux et portant sur diverses quantités ration-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXII^{e} cahier, page 128.

nelles : si donc P_1 désigne une fonction quelconque *irrationnelle* de première espèce, la valeur de P_1 sera de la forme

$$P_1 = P + \sqrt[m]{Q} + \sqrt[n]{R} + \ldots + \sqrt[q]{S},$$

P, Q, R,...S désignant des expressions rationnelles. Et l'on peut déterminer semblablement la forme la plus générale de chaque espèce d'irrationnelles. Mais cette distinction des fonctions algébriques en classes et en espèces que j'ai cru devoir indiquer en deux mots comme étant quelquefois utile, n'est point indispensable pour notre théorie. Ce qu'il est essentiel de ne pas oublier, c'est que le mot *fonction algébrique* s'applique à toutes les fonctions u déterminées par une équation de la forme

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = 0,$$

P, Q,...R, S désignant des polynomes entiers en x. Dire qu'une fonction algébrique u est donnée c'est dire que l'on possède l'équation à coefficients entiers qui la détermine ou du moins une expression irrationnelle qui permette de remonter à cette équation par la méthode développée dans les traités d'Algèbre.

3. On dit que l'équation algébrique

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = 0$$

est *irréductible* lorsque nulle de ses racines ne peut satisfaire à une équation moins élevée dont les coefficients soient également des fonctions entières. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit irréductible, c'est que son premier membre ne se décompose pas en facteurs rationnels par rapport à x et y.

Posons

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = U$$

et soient u_1, u_2, u_3....u_n les racines de l'équation $U = 0$: ces racines jouiront des propriétés fondamentales suivantes.

On ne pourra avoir ni $u_1 = 0$, ni $u_1 = u_2$; car si deux racines de l'équation étaient égales entre elles, son premier membre se décomposerait en deux facteurs rationnels par la méthode connue; et il en serait de même si l'une des racines était nulle, puisque cette dernière circonstance exige qu'on ait $S=o$, ce qui rend le polynome Pu^n+etc. divisible par u.

Si l'une des racines, savoir u_1, satisfait à une seconde équation algébrique $V=o$, irréductible ou non, de même forme que la proposée, toutes les aûtres racines $u_2, u_3, \ldots u_n$ satisferont aussi à cette seconde équation. En effet, pour que les deux équations $U=o$, $V=o$ aient une racine commune, il faut que les deux polynomes U, V possèdent un commun diviseur. Or si ce commun diviseur n'était pas égal à U, à un coefficient près indépendant de l'inconnue u, la fonction u se décomposerait en deux facteurs rationnels, ce qui est absurde. Donc V est divisible par U, ou du moins peut se mettre sous la forme

$$V = \frac{UW}{K},$$

K dépendant de x seule, tandis que W est une fonction entière de x et u ou de x seule : par conséquent les valeurs $u=u_1$, $u=u_2$, $u=u_3, \ldots u=u_n$ qui donnent $U=o$ donnent aussi $V=o$. Toutes ces propriétés des équations irréductibles subsisteront evidemment si u devient une fonction de plusieurs variables x, y, z, etc., pourvu que les coefficients P, Q,...R, S ne cessent pas d'être exprimés par des fonctions entières de ces variables indépendantes.

4. Après les fonctions algébriques viennent les fonctions logarithmiques dont la plus simple $\log x$ est ce qu'on nomme le *logarithme népérien* de x. La propriété principale de la fonction $\log x$, pour les recherches de calcul intégral, est renfermée dans l'équation.... $d\log x = \frac{dx}{x}$, d'où l'on déduit, abstraction faite de la constante arbitraire, $\log x = \int \frac{dx}{x}$. On pourrait même partir de cette dernière égalité comme d'une définition et dire qu'on nomme $\log x$ la fonction de x qu'on obtient en intégrant $\frac{dx}{x}$ et assujétissant l'intégrale à s'évanouir pour $x=1$, de telle sorte qu'on a, dans la notation de Fourier, $\log x = \int_1^x \frac{dx}{x}$. Quant aux logarithmes dont la base n'est pas le nombre $e=2,718,\ldots$, ils se déduisent des logarithmes népé-

riens en multipliant ceux-ci par un nombre constant convenable. Ils ne forment donc point une classe nouvelle de fonctions par rapport à la variable x.

En désignant par X, Y deux polynomes entiers premiers entre eux et de la forme

$$a + bx + cx^2 + \ldots + hx^m,$$

le quotient $\frac{X}{Y}$ représentera une fonction algébrique rationnelle quelconque de x. Cela posé, je dis qu'on ne peut pas avoir

$$\log x = \frac{X}{Y}.$$

En effet, si l'on différentie cette équation, puis qu'on chasse le dénominateur Y^2, on obtient

$$\frac{Y^2}{x} = YX' - XY',$$

X', Y' représentant les dérivées $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dY}{dx}$ conformément à la notation de Lagrange dont nous ferons un continuel usage. Il résulte de là que Y doit être divisible par x un certain nombre n de fois et que par conséquent X ne doit pas l'être, puisque X et Y sont premiers entre eux. Faisons donc $Y = Zx^n$, Z étant un nouveau polynome non divisible par x : nous en conclurons

$$Y' = nZx^{n-1} + Z'x^n.$$

Je substitue cette valeur et celle de Y dans l'équation précédente qui devient :

$$Z^2x^{2n-1} = ZX'x^n - nZXx^{n-1} - XZ'x^n,$$

et qu'on peut ensuite écrire ainsi

$$nXZ = x(ZX' - XZ') - Z^2x^n,$$

forme sous laquelle l'absurdité de cette équation devient manifeste, car le second membre est divisible par x et le premier ne l'est pas, puisque les facteurs qui le composent sont tous les deux non divisibles par x.

On peut aller plus loin et démontrer que l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ ou $\log x$ n'est point exprimable algébriquement en x, de telle sorte qu'il n'existe aucune fonction algébrique de la lettre x qui soit équivalente à $\log x$. En effet, s'il existe une telle fonction, désignons-la par y: nous aurons $\int \frac{dx}{x} = y$, et y devra satisfaire à une certaine équation algébrique

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

$f(x, y)$ désignant une quantité de la forme

$$Py^n + Qy^{n-1} + \ldots + Ry + S$$

dans laquelle les coefficients P, Q,...R, S dépendent de x seule et représentent des polynomes entiers. Il est permis de supposer l'équation (1) irréductible : en effet, si y pouvait satisfaire à une autre équation semblable et de degré $< n$, c'est celle-là que nous devrions employer au lieu de l'équation (1).

Puisqu'on a $\int \frac{dx}{x} = y$, on a aussi

$$\frac{dx}{x} = dy.$$

En différentiant l'équation (1) et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{1}{x}$, il vient

$$(2) \qquad xf'_x(x, y) + f'_y(x, y) = 0.$$

Pour que l'équation $\frac{dx}{x} = dy$ soit exacte, il faut et il suffit que les équations (1) et (2) aient lieu en même temps quel que soit x. Mais l'équation (1) étant irréductible, on sait que si l'une de ses racines satisfait à l'équation (2) les autres y satisferont aussi. Désignant donc par y_1, $y_2, \ldots y_n$ les n racines de l'équation $f(x, y) = 0$ résolue par rapport à y, nous voyons que si la différentielle de l'une de ces racines est égale à $\frac{dx}{x}$, les différentielles de toutes les autres seront de même égales à $\frac{dx}{x}$. Il résulte de là que si la quantité $\int \frac{dx}{x}$ est algébrique, on aura à la fois

$$\frac{dx}{x} = dy_1, \quad \frac{dx}{x} = dy_2, \ldots \quad \frac{dx}{x} = dy_n,$$

d'où l'on tire

$$\frac{ndx}{x} = dy_1 + dy_2 + \ldots + dy_n;$$

et par conséquent, abstraction faite de la constante arbitraire, il viendra

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = -\frac{Q}{nP},$$

c'est-à-dire que $\int \frac{dx}{x}$ sera une fonction rationnelle de x, ce dont j'ai déjà prouvé l'impossibilité.

La quantité $\log x$ n'est donc point une fonction algébrique de x; et il en est de même de la quantité $\log F(x)$, quelle que soit la fonction algébrique $F(x)$. En effet si l'on avait $\log F(x) = f(x)$, $f(x)$ étant une autre fonction algébrique, en posant $F(x) = z$, ce qui donne pour x une valeur algébrique en z telle que $x = \varpi(z)$, on en déduirait $\log z = f[\varpi(z)]$, c'est-à-dire $\log z =$ *une fonction algébrique de* z, ce qui est absurde.

5. La fonction inverse de $\log x$ donne l'exponentielle e^x, dont la définition par conséquent est comprise dans l'égalité $\log(e^x) = x$. Il est aisé de démontrer que e^x n'est point exprimable algébriquement en x, car si l'on avait $e^x = F(x)$, $F(x)$ désignant une fonction algébrique, on en conclurait $\log F(x) = x$, équation impossible d'après ce qu'on a démontré à la fin du numéro précédent. En général si p et q désignent deux fonctions algébriques, on n'aura jamais $e^p = q$; car il en résulterait $\log q = p$, ce qui est inadmissible.

Soient maintenant $P, Q, R, \ldots T$, des fonctions algébriques de la variable indépendante x qui ne soient pas identiquement nulles et $p, q, r, \ldots$ d'autres fonctions de x algébriques aussi et telles que nulle des quantités $p, q, r, \ldots p-q, p-r, q-r, \ldots$ ne se réduise à une simple constante; je dis qu'on prouvera l'impossibilité de toutes les équations suivantes

$$Pe^p = T,$$
$$Pe^p + Qe^q = T,$$
$$Pe^p + Qe^q + Re^r = T, \text{ etc.},$$

quel que soit le nombre des termes placés dans leur premier membre.

D'abord l'équation $Pe^p = T$ est impossible, puisqu'elle conduit au résultat absurde $\log \frac{T}{P} = p$.

Supposons en second lieu qu'on ait

$$Pe^p + Qe^q = T,$$

sans que les quantités P, Q, T, soient nulles. En différentiant, il vient

$$e^p\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) + e^q\left(Q\frac{dq}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) = \frac{dT}{dx}.$$

Entre cette équation et la précédente, j'élimine e^p : je trouve ainsi

$$e^q\left[P\left(Q\frac{dq}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) - Q\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right)\right] = P\frac{dT}{dx} - T\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right),$$

résultat impossible puisqu'il rentre dans la forme $Pe^p = T$, examinée ci-dessus. Toutefois ce raisonnement se trouverait en défaut, si l'on avait à la fois

$$P\frac{dT}{dx} - T\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) = 0,$$

et

$$P\left(Q\frac{dq}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) - Q\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) = 0.$$

Mais si l'on avait

$$P\frac{dT}{dx} - T\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) = 0,$$

on tirerait aisément de là

$$\frac{dp}{dp} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T},$$

puis, en intégrant et désignant par C une constante arbitraire, on en conclurait

$$Pe^p = CT,$$

ce qui est absurde. De même, si l'on avait

$$P\left(Q\frac{dq}{dx}+\frac{dQ}{dx}\right)-Q\left(P\frac{dp}{dx}+\frac{dP}{dx}\right)=0,$$

on en déduirait

$$e^{p-q}=\frac{CQ}{P},$$

ce qui est absurde aussi, puisque p et q sont deux fonctions algébriques de x dont la différence ne se réduit pas à une simple constante. Donc, quoi qu'on fasse, on est conduit à une absurdité, dès que l'on part de l'équation

$$Pe^p + Qe^q = T:$$

donc une telle équation ne peut pas exister. Et, d'une manière semblable, on prouvera l'impossibilité de l'équation

$$Pe^p + Qe^q + Re^r + \text{etc.} = T,$$

quel que soit le nombre des quantités p, q, r, etc. Le théorème démontré au numéro II de mon mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes (*) est compris comme cas particulier dans le théorème que je viens d'établir.

§ II.

Division des fonctions transcendantes en espèces.

6. Leibnitz et les Bernouilli, qui paraissent avoir donné les premiers au mot *fonction* l'acception étendue que nous lui attribuons aujourd'hui, ont distingué les fonctions *algébriques* et les fonctions *transcendantes*.

Le nombre de ces dernières est infini; mais dans les éléments on se contente de considérer les exponentielles et les logarithmes, que l'on doit regarder comme renfermant d'une part les puissances à

(*) Journal de M. Crelle, tome XIII, p. 93.

exposant irrationnel, imaginaire ou variable, et d'autre part toutes les fonctions circulaires, tant directes qu'inverses, ainsi qu'on peut aisément s'en convaincre.

Les caractéristiques particulières aux quantités algébriques, logarithmiques et exponentielles, sont les trois suivantes $\varpi(x)$, e^r, $\log x$. Au moyen de ce signe $\varpi(x)$, toutes les fonctions algébriques sont explicites : il n'en est pas de même des fonctions logarithmiques ou exponentielles.

L'emploi des signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$ donne naissance aux fonctions finies qui peuvent, suivant les cas, être explicites ou implicites.

Une fonction finie de x est *explicite, lorsqu'on peut en écrire l'expression en indiquant explicitement sur la variable x un nombre limité d'opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques.* La valeur d'une telle fonction dépend donc uniquement des signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$.

Une fonction finie est implicite, lorsqu'elle dépend d'équations finies, non résolubles explicitement. Par exemple, la racine y de l'équation $\log y = xy$ est une fonction finie implicite de x.

Quand on emploie le mot *fonction finie*, sans y ajouter d'épithète, c'est en général d'une fonction finie explicite que l'on entend parler.

7. Les fonctions finies explicites peuvent être classées en espèces par une méthode semblable à celle dont j'ai fait usage au n° 2, pour distinguer les divers ordres d'irrationnalité des quantités algébriques exprimables par radicaux.

En effet, une fonction finie est algébrique ou transcendante.

Elle est transcendante de première espèce, quand les signes relatifs aux opérations transcendantes, dont elle dépend, portent sur de simples fonctions algébriques; par exemple la quantité

$$\frac{e^x + \sqrt{\log x}}{1 + \log x},$$

est une fonction transcendante de première espèce. D'après cette définition, on conçoit que toute fonction finie de x, appartenant à la première espèce, ne pourra être qu'une fonction algébrique de x, d'un certain nombre de logarithmes, de la forme $\log u$, et d'un certain nombre d'exponentielles de la forme e^u, u étant algébrique.

Une fonction finie transcendante est de deuxième espèce, quand les signes relatifs aux opérations transcendantes ne portent pas seulement sur des fonctions algébriques, mais encore sur des fonctions transcendantes de première espèce, comme dans cet exemple $\log(1 + \log x)$.

Une fonction finie est transcendante de troisième espèce, quand les signes relatifs aux opérations transcendantes portent sur des fonctions de seconde espèce, et ainsi de suite.

Je nomme transcendantes *monomes* les transcendantes formées d'un seul terme, comme e^u, $\log u$, quelle que soit d'ailleurs la fonction u. Par conséquent e^{x^2}, $\log(1 + e^x + \log x)$ sont des transcendantes monomes; ces quantités e^u, $\log u$ peuvent d'ailleurs appartenir à une espèce ou à une autre, suivant la nature de u. Elles sont en général de $n^{ième}$ espèce, lorsque la fonction u est de $(n - 1)^{ième}$ espèce. En supposant que u désigne une fonction quelconque de $(n - 1)^{ième}$ espèce, je dirai aussi parfois que e^u est une exponentielle, et $\log u$ un logarithme de $n^{ième}$ espèce.

D'après cela, e^{x^2} est une exponentielle de première espèce, et $\log(1 + e^x + \log x)$ est un logarithme de seconde espèce.

L'indice n qui désigne l'espèce d'une fonction finie peut diminuer par la différentiation, mais il n'augmente jamais. Par exemple la dérivée d'une fonction finie de première espèce est tout au plus de la première espèce. De plus les transcendantes monomes entrant dans la fonction primitive sont les seules qui puissent entrer dans la dérivée. Cette remarque est une conséquence évidente des règles mêmes du calcul différentiel.

8. Dans le numéro précédent, nous avons regardé les fonctions finies comme renfermant ou pouvant renfermer à la fois des exponentielles et des logarithmes; néanmoins, il est des circonstances, assez rares à la vérité, où l'on a besoin de considérer des fonctions exponentielles dépendant des seuls signes $\varpi(x)$, e^x, et des fonctions purement logarithmiques dépendant des seuls signes $\varpi(x)$, $\log x$. La division des fonctions en espèces ne sera pas moins utile ici que dans le cas général. On nommera fonction exponentielle de première espèce celle où les signes exponentiels ne porteront que sur des quantités algébriques; la fonction exponentielle de première espèce la plus

générale est donc de la forme $f(x, e^u, e^v, \ldots e^w)$, u, $v, \ldots w$, dépendant algébriquement de x, et la caractéristique f étant algébrique par rapport à x, e^u, $e^v, \ldots e^w$. La fonction exponentielle de seconde espèce sera celle où les signes exponentiels porteront sur des fonctions de première espèce. Et ainsi des autres. On distinguera de même en espèces les fonctions purement logarithmiques.

A peine a-t-on besoin d'avertir que notre classification des transcendantes s'étend aux fonctions de plusieurs variables $x, y, z \ldots$

9. Quand le nombre des transcendantes *monomes*, entrant dans une fonction finie explicite, est supposé le plus petit possible, la fonction jouit de propriétés semblables à celles des équations algébriques irréductibles.

Considérons d'abord une fonction de première espèce U, et soient θ, $\eta, \ldots \zeta$, les transcendantes monomes dont elle dépend. D'après nos définitions, la valeur de U sera de la forme

$$U = f(x, \theta, \eta, \ldots \zeta),$$

la caractéristique f dénotant une fonction algébrique par rapport aux lettres comprises entre parenthèses.

Cela posé, si le nombre μ des transcendantes *monomes*, θ, $\eta, \ldots \zeta$, est supposé réduit à son minimum, c'est-à-dire s'il est impossible de trouver une autre fonction transcendante de première espèce équivalente à U, et contenant moins de transcendantes monomes que $f(x, \theta, \eta, \ldots \zeta)$, je dis que nulle relation algébrique ne pourra exister entre la variable indépendante x et les μ quantités θ, $\eta, \ldots \zeta$, à moins qu'elle ne soit identique. En effet une telle relation, si elle avait lieu, fournirait la valeur de l'une de ces transcendantes, de θ par exemple, exprimée algébriquement en fonction de x et des autres, et dès-lors on pourrait en reportant dans U cette valeur de θ diminuer μ d'une unité, ce qui est impossible.

Pour rendre notre raisonnement plus précis, concevons que l'on tombe, par une suite quelconque de calculs, sur une équation de la forme

$$\varphi(x, \theta, \eta, \ldots \zeta) = 0,$$

dont le premier membre soit algébrique, par rapport à x, θ, $\eta, \ldots \zeta$.

Je dis que cette équation ne pourra contenir θ, $\eta, \ldots \zeta$ qu'en apparence, de sorte qu'elle subsisterait encore si l'on venait à remplacer θ, $\eta, \ldots \zeta$, soit par d'autres fonctions de x prises au hasard, soit par de simples lettres indéterminées. En effet si cette équation n'était pas identique relativement à θ par exemple, elle fournirait la valeur de θ sous la forme

$$\theta = \varpi(x, \eta, \ldots \zeta),$$

ϖ indiquant une fonction algébrique, et en portant cette valeur de θ dans celle de U, on en conclurait

$$U = f[x, \varpi(x, \eta, \ldots \zeta), \eta, \zeta]:$$

or cette expression de U est absurde, puisqu'elle renferme une transcendante *monome* de moins que la précédente, laquelle était pourtant supposée en contenir le plus petit nombre possible.

Cette démonstration étant générale et rigoureuse pour toutes les fonctions de première espèce, pourvu que le nombre de leurs transcendantes monomes soit un minimum, nous avons droit de dire que, *si, par la marche des calculs, on est conduit à une équation algébrique, entre la variable x et les transcendantes monomes qui composent la fonction sus-dite, on ne troublera pas l'égalité en remplaçant les transcendantes par des fonctions nouvelles prises au hasard ou par des quantités purement littérales.*

Supposons maintenant que U soit une fonction transcendante de $n^{ième}$ espèce, et que θ, $\eta, \ldots \zeta$ représentent les μ transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce, entrant dans cette fonction. La valeur de U, considérée comme dépendante de θ, $\eta, \ldots \zeta$, sera de la forme

$$U = f(\theta, \eta, \ldots \zeta).$$

la fonction f étant algébrique par rapport aux quantités comprises entre parenthèses et contenant en outre d'autres transcendantes d'ordre inférieur dont il est inutile de nous occuper.

Maintenant, si le nombre μ est supposé le plus petit possible, je dis que nulle relation algébrique ne pourra exister entre la variable x, les transcendantes θ, $\eta, \ldots \zeta$ et d'autres transcendantes d'ordre inférieur quelles qu'elles soient. En effet, une telle relation, si elle existait, fournirait la valeur de l'une de ces transcendantes, de θ par exemple, en fonction algébrique des autres, et permettrait, en portant la valeur de θ dans celle de U, de diminuer le nombre μ d'une unité, ce qui est absurde.

Ce raisonnement est tout semblable à celui dont nous nous sommes servis pour établir le théorème relatif aux fonctions de première espèce. *Nous voyons donc en général que si* θ, $\eta, \ldots \zeta$ *désignent les transcendantes monomes de* $n^{ième}$ *espèce entrant dans une fonction de* $n^{ième}$ *espèce, toute relation algébrique entre* x, θ, $\eta, \ldots \zeta$ *et des transcendantes d'espèce inférieure à la* $n^{ième}$ *devra être identique en* $\theta, \eta, \ldots \zeta$, *c'est-à-dire devra subsister si l'on remplace* θ, $\eta, \ldots \zeta$ *soit par d'autres fonctions de* x, *soit par de simples lettres indéterminées.* Ce principe recevra par la suite de nombreuses applications.

§ III.

Démonstrations de quelques théorèmes relatifs aux fonctions $\log x$, e^x, $\log \log x$, etc.

10. Non-seulement la fonction $\log x$ ne peut être équivalente à aucune fonction algébrique de x; mais même elle ne peut être exprimée par aucune combinaison quelle qu'elle soit d'un nombre limité de signes algébriques avec un nombre limité de signes exponentiels. Et réciproquement l'exponentielle e^x ne peut être exprimée par aucune fonction purement algébrique et logarithmique. Ces théorèmes méritent d'être démontrés d'une manière rigoureuse : on en conclut que les signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$ dont nous faisons usage dans notre classification des fonctions finies explicites sont réduits au moindre nombre possible.

Pour rendre notre démonstration plus claire, prouvons d'abord que la quantité $\log x$ ne peut être équivalente à aucune fonction purement exponentielle de première espèce : en d'autres termes prouvons qu'en désignant par u, $v, \ldots w$ des fonctions algébriques et par ζ, $\eta, \ldots \theta$ les exponentielles e^u, $e^v, \ldots e^w$, on ne peut pas avoir

$$\log x = f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta),$$

si la fonction représentée par f est une fonction algébrique.

Représentons par m le nombre des exponentielles $\zeta, \eta, \ldots \theta$ qui entrent dans la valeur précédente de $\log x$. Nous avons évidemment le droit de supposer ce nombre m réduit à son minimum, c'est-à-dire de supposer que $\log x$ ne puisse s'exprimer par aucune autre fonction semblable à la fonction f, mais contenant moins d'exponentielles; car si cette autre valeur de $\log x$ existait, c'est celle-là que nous choisirions pour y appliquer nos calculs. Dès-lors aucune relation algébrique entre les quantités $x, \zeta, \eta, \ldots \theta$ ne pourra avoir lieu à moins qu'elle ne soit identique par rapport à chacune des transcendantes. Or, on obtient une telle relation en différentiant la valeur de $\log x$: la différentiation donne en effet,

$$\frac{dx}{x} = df(x, \zeta, \eta, \ldots \theta),$$

ou bien (en observant que l'on a $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\zeta du}{dx} = \zeta u'$, $\frac{d\eta}{dx} = \eta v', \ldots \frac{d\theta}{dx} = \theta w'$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} = {} & f'_x(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) + f'_\zeta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\zeta u' \\ & + f'_\eta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\eta v' + \ldots + f'_\theta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\theta w'.\end{aligned}$$

L'équation que je viens d'écrire doit donc subsister si l'on remplace $\zeta, \eta, \ldots \theta$ par $\alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta$, $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ désignant des quantités purement littérales. Il résulte de là qu'on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} = {} & f'_x(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta) + f'_{\alpha\zeta}(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta)\alpha\zeta u' \\ & + f'_{\beta\eta}(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta)\beta\eta v' + \ldots + f'_{\gamma\theta}(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta)\gamma\theta w',\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{x} = df(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta).$$

En égalant cette valeur de $\frac{dx}{x}$ à la précédente $df(x, \zeta, \eta, \theta)$, puis intégrant, on a donc

$$f(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta) = f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) + C.$$

Pour déterminer la constante C, je nomme a, b,...c les valeurs respectives de ζ, η,...θ pour une valeur déterminée quelconque $x = g$: il en résulte

$$f(g, \alpha a, \beta b, \ldots \gamma c) = f(g, a, b, \ldots c) + \mathrm{C}.$$

Éliminant C, on a

$$\begin{aligned} f(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta) &- f(g, \alpha a, \beta b, \ldots \gamma c) \\ &= f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) - f(g, a, b, \ldots c). \end{aligned}$$

Je différentie cette équation par rapport à α, et après la différentiation, je pose $\alpha = 1$, $\beta = 1, \ldots \gamma = 1$: je trouve par là

$$\zeta f'_\zeta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) = a f'_a(g, a, b, \ldots c),$$

ou simplement,

$$f'_\zeta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) = \frac{\mathrm{A}}{\zeta},$$

en représentant par A la constante $a f'_a(g, a, b, \ldots c)$. L'équation algébrique précédente subsistera encore (n° 9) si je remplace ζ, η,...θ par les quantités purement littérales λ, μ,...ν : on a par conséquent,

$$f'_\lambda(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = \frac{\mathrm{A}}{\lambda},$$

et l'on aura de même,

$$f'_\mu(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = \frac{\mathrm{B}}{\mu},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f'_\nu(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = \frac{\mathrm{C}}{\nu},$$

si l'on représente par B,...C les constantes $b f'_b(g, a, b, \ldots c)$, $c f'_c(g, a, b, \ldots c)$. De là il est aisé de conclure

$$f'_\lambda(x, \lambda, \mu, \ldots \nu)\, d\lambda + f'_\mu(x, \lambda, \mu, \ldots \nu)\, d\mu + \ldots$$
$$+ f'_\nu(x, \lambda, \mu, \ldots \nu)\, d\nu = \frac{A d\lambda}{\lambda} + \frac{B d\mu}{\mu} + \ldots + \frac{C d\nu}{\nu} :$$

intégrant donc par rapport à $\lambda, \mu, \ldots \nu$, il vient

$$f(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = A \log \lambda + B \log \mu + \ldots + C \log \nu + \text{const.}$$

La constante est ici une fonction de x : pour la déterminer, soient $\lambda_0, \mu_0, \ldots \nu_0$ des valeurs particulières de $\lambda, \mu, \ldots \nu$: en les substituant, on obtiendra

$$f(x, \lambda_0, \mu_0, \ldots \nu_0) = A \log \lambda_0 + B \log \mu_0 + \ldots + C \log \nu_0 + \text{const.}$$

d'où l'on tire, par la soustraction,

$$f(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = f(x, \lambda_0, \mu_0, \ldots \nu_0) + A(\log \lambda - \log \lambda_0)$$
$$+ B(\log \mu - \log \mu_0) + \ldots + C(\log \nu - \log \nu_0).$$

Comme je puis actuellement donner à $\lambda, \mu, \ldots \nu$ les valeurs que je veux, je pose $\lambda = \zeta$, $\mu = \eta, \ldots \nu = \theta$: le premier membre devient $f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)$ ou $\log x$: en observant que $\log \zeta = u$, $\log \eta = v, \ldots$ $\log \theta = w$, j'en tire donc

$$\log x = f(x, \lambda_0, \mu_0, \ldots \nu_0) + A(u - \log \lambda$$
$$+ B(v - \log \mu_0) + \ldots + C(w - \log \nu_0),$$

équation absurde; car le second membre est une fonction algébrique de x, laquelle ne peut pas être égale à $\log x$, d'après ce qu'on a démontré ci-dessus.

11. On peut abréger la démonstration précédente, sans d'ailleurs en changer l'esprit; il suffit pour cela de considérer à part une des exponentielles $\zeta, \eta, \ldots \theta$, la première par exemple, au lieu de les considérer toutes à la fois. Je développerai d'autant plus volontiers cette seconde méthode, ou plutôt cette autre manière d'envisager la même méthode, que j'en ferai par la suite un usage continuel et exclusif. Voici comment il faut raisonner alors.

Il s'agit de prouver l'absurdité de l'équation

$$(1) \qquad \log x = f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta),$$

dont le second membre renferme m exponentielles $\zeta, \eta, \ldots \theta$: le nombre m est supposé réduit à son minimum : par conséquent si de l'équation (1) on déduit une autre équation semblable dont le second membre renferme moins de m exponentielles, l'absurdité de l'équation (1) sera par cela même rendue manifeste.

Maintenant pour mettre spécialement en évidence l'exponentielle ζ, j'écrirai

$$\log x = \varphi(x, \zeta),$$

et j'en déduirai en différentiant

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \zeta) + \varphi'_\zeta(x, \zeta)\zeta u',$$

$\varphi'_x(x, \zeta)$ étant l'expression abrégée de

$$f'_x(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) + f'_\eta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\eta v' + \ldots + f'_\theta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\theta w'.$$

L'équation

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \zeta) + \varphi'_\zeta(x, \zeta)\zeta u'$$

remplace l'équation équivalente

$$\frac{1}{x} = f'_x(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) + f'_\zeta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\zeta u' \\ + f'_\eta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\eta v' + \ldots + f'_\theta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\theta w',$$

dont nous nous sommes servis dans le numéro précédent, mais elle est beaucoup plus simple à écrire. Cette équation doit être identique par rapport à ζ : on peut donc y remplacer ζ par $\alpha\zeta$, α étant une quantité numérique quelconque, ce qui donne

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \alpha\zeta) + \varphi'_{\alpha\zeta}(x, \alpha\zeta)\alpha\zeta u',$$

équation dont le second membre, multiplié par dx, fournit pour résultat la différentielle complète $d\varphi(x, \alpha\zeta)$. En égalant cette valeur de $\frac{1}{x}$ à la précédente, et intégrant l'équation qui en résulte, puis déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $x = g$, à laquelle répond $\zeta = a$, on obtient

$$\varphi(x, \alpha\zeta) = \varphi(x, \zeta) + \varphi(g, \alpha a) - \varphi(g, a).$$

Je différentie cette équation par rapport à α et je fais ensuite $\alpha = 1$. En posant $a\varphi'_a(g, a) = \mathrm{A}$, je trouve ainsi,

$$\zeta\varphi'_\zeta(x, \zeta) = \mathrm{A}.$$

Cette équation étant algébrique par rapport à $x, \zeta, \eta, \ldots \theta$ doit subsister si l'on remplace ζ par une lettre indéterminée i que l'on pourra regarder comme une variable indépendante. On a donc

$$\varphi'_i(x, i) = \frac{\mathrm{A}}{i}.$$

Multipliant par di et intégrant, j'obtiens

$$\varphi(x, i) = \mathrm{A} \log i + \text{const.}$$

d'où résulte, en déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière i_0 de i,

$$\varphi(x, i) = \mathrm{A} \log i + \varphi(x, i_0) - \mathrm{A} \log i_0.$$

J'ai le droit de donner à i telle valeur qu'il me plaira : je pose donc $i = \zeta$; le premier membre de mon équation devient $\varphi(x, \zeta)$ ou $\log x$: de là je conclus, en observant que $\log \zeta = u$:

$$\log x = \mathrm{A}u + \varphi(x, i_0) - \mathrm{A} \log i_0,$$

équation absurde, car le second membre est une fonction exponentielle de première espèce où ζ n'entre plus et qui renferme seulement $m - 1$ exponentielles $\eta, \ldots \theta$, tandis que la valeur de $\log x$ doit par hypothèse en contenir au moins m. Nous sommes ainsi conduits de nouveau à la conclusion obtenue dans le numéro précédent, savoir qu'une équation de la forme (1) est inadmissible. Le lecteur jugera sans doute avec nous que la démonstration donnée en dernier lieu est plus simple et aussi rigoureuse que celle du n° 10 : elle abrége surtout considérablement l'écriture.

12. Faisons voir maintenant que $\log x$ ne peut être exprimé par aucune fonction exponentielle de $n^{\text{ième}}$ espèce, quel que soit n. Dé-

signons en effet par m le nombre des exponentielles de $n^{ième}$ espèce, et supposons le nombre m réduit à son minimum, en sorte que nulle relation algébrique ne puisse exister entre ces exponentielles de $n^{ième}$ espèce et d'autres, quelles qu'elles soient, d'espèce inférieure. Soit $\zeta = e^u$ une quelconque d'entre elles, u étant une fonction exponentielle de $(n-1)^{ième}$ espèce, et, pour mettre ζ en évidence, écrivons

$$\log x = \varphi(x, \zeta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à ζ, et contenant en outre, algébriquement aussi, d'autres expronentielles monomes dont il est inutile de faire une mention explicite.

L'équation

$$\frac{dx}{x} = d\varphi(x, \zeta),$$

ou

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \zeta) + \varphi'_\zeta(x, \zeta)\zeta u',$$

que l'on obtient en différentiant la valeur de $\log x$, est algébrique par rapport à ces transcendantes aussi bien que par rapport à ζ. Donc elle doit subsister en remplaçant ζ par $\alpha\zeta$, α étant une quantité numérique quelconque ; ainsi l'on a

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \alpha\zeta) + \varphi'_{\alpha\zeta}(x, \alpha\zeta)\alpha\zeta u',$$

d'où il est aisé de conclure

$$\frac{dx}{x} = d\varphi(x, \alpha\zeta).$$

J'égale cette valeur de $\frac{dx}{x}$ à la précédente $d\varphi(x, \zeta)$, après quoi j'intègre, et je détermine la constante à l'aide d'une valeur particulière $x = b$, à laquelle réponde $\theta = a$. Il vient

$$\varphi(x, \alpha\zeta) = \varphi(x, \zeta) + \varphi(b, \alpha a) - \varphi(b, a).$$

Je différentie par rapport à α l'équation que je viens d'écrire, et posant $\alpha = 1$ après la différentiation, je trouve

$$\zeta\varphi'_\zeta(x, \zeta) = a\varphi'_a(b, a),$$

équation algébrique par rapport à ζ et qui doit subsister si l'on remplace ζ par une lettre indéterminée i : remplaçant donc ζ par i et faisant $a\varphi'_a(b, a) = \mathrm{A}$, j'ai

$$\varphi'_i(x, i) = \frac{\mathrm{A}}{i},$$

ce qui me donne, en intégrant par rapport à i,

$$\varphi(x, i) = \mathrm{A} \log i + \text{const.}$$

En déterminant la constante à l'aide d'une valeur particuliere i_0 de i et posant ensuite $i = \zeta$, on obtient enfin, comme ci-dessus,

$$\log x = \mathrm{A}u + \varphi(x, i_0) - \mathrm{A} \log i_0,$$

équation absurde, puisque le nombre des exponentielles de n^{ieme} espèce contenues dans le second membre est $< m$, ce qui ne se peut.

13. Il est rigoureusement établi par là que la fonction $\log x$ ne peut être équivalente à aucune fonction φ purement exponentielle ou dépendante des seuls signes $\varpi(x)$, e^x. On peut en dire autant des fonctions suivantes $\log\log x$, $\log\log\log x$, etc.; car si l'on avait $\log\log x = \varphi$, on en déduirait $\log x = e^\varphi$, ce qui est absurde. Réciproquement nous ferons voir que la quantité e^x ne peut être exprimée par aucune fonction purement logarithmique.

Supposons, par exemple, qu'il soit possible d'exprimer e^x par une fonction logarithmique de première espèce, c'est-à-dire de la forme

$$e^x = f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta),$$

$\zeta, \eta, \ldots \theta$, ayant pour valeurs respectives $\log u$, $\log v, \ldots \log w$ où $u, v, \ldots w$, désignent des fonctions algébriques, et le nombre m des quantités $\zeta, \eta, \ldots \theta$ étant réduit à son minimum.

Considérons spécialement ζ par exemple, et remplaçons en conséquence $f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)$, par $\varphi(x, \zeta)$; nous aurons en prenant les logarithmes des deux membres

$$x = \log \varphi(x, \zeta),$$

d'où résulte, en différentiant

$$dx = \frac{d\varphi(x, \zeta)}{\varphi(x, \zeta)},$$

ou

$$1 = \frac{\varphi'_x(x, \zeta) + \varphi'_\zeta(x, \zeta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \zeta)},$$

équation purement algébrique par rapport à $\zeta, \eta, \ldots \theta$, qui doit être identique par rapport à ζ, et où l'on peut en conséquence remplacer ζ par $\alpha + \zeta$, α étant un nombre quelconque. On a donc

$$1 = \frac{\varphi'_x(x, \alpha+\zeta) + \varphi'\zeta(x, \alpha+\zeta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \alpha+\zeta)},$$

ou

$$dx = \frac{d\varphi(x, \alpha+\zeta)}{\varphi(x, \alpha+\zeta)}.$$

J'égale cette valeur de dx à la précédente, ce qui me donne

$$\frac{d\varphi(x, \alpha+\zeta)}{\varphi(x, \alpha+\zeta)} = \frac{d\varphi(x, \zeta)}{\varphi(x, \zeta)};$$

intégrant donc et déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $x=b$, à laquelle réponde $\zeta = a$, on obtient

$$\varphi(x, \alpha+\zeta) = \frac{\varphi(x, \zeta)}{\varphi(b, a)}\varphi(b, \alpha + a).$$

Je différentie maintenant par rapport à α, et après la différentiation je pose $\alpha = 0$: cela me donne

$$\varphi'_\zeta(x, \zeta) = \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)}\varphi(x, \zeta),$$

équation algébrique par rapport à ζ et qui doit subsister encore si l'on remplace ζ par une lettre indéterminée i. On a par conséquent

$$\varphi'_i(x, i) = \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)}\varphi(x, i):$$

en posant $\frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)} = h$, on en conclut

$$\frac{\varphi'_i(x, i)\,di}{\varphi(x, i)} = hdi.$$

Intégrant donc par rapport à i, et déterminant la constante que l'intégration introduit à l'aide d'une valeur particulière $i=i_0$, on tire aisément de là

$$\varphi(x,\ i)e^{hi_0} = \varphi(x,\ i_0)e^{hi},$$

résultat absurde, puisqu'on en déduirait e^{hi} = *une fonction algébrique de* i, ce qui ne se peut. Si h était $=0$, ce raisonnement ne serait plus possible; mais on aurait alors $\varphi(x,\ i)=\varphi(x,\ i_0)$; d'où, en posant $i=\zeta$, on conclurait $\varphi(x,\zeta)$ ou $e^x=\varphi(x,\ i_0)$, équation absurde, puisque son second membre renferme seulement $(m-1)$ logarithmes, tandis que la valeur de e^x doit, par hypothèse, en contenir au moins m.

On prouvera en général que e^x ne peut être exprimé par aucune fonction purement logarithmique de $n^{ième}$ espèce. En effet soit ζ une des m exponentielles de $n^{ième}$ espèce entrant dans la valeur supposée de e^x, et suivant notre usage posons $e^x = \varphi(x,\ \zeta)$. Regardons le nombre m comme réduit à son minimum : dès-lors aucune relation algébrique ne pourra exister entre x, ζ, les autres logarithmes de $n^{ième}$ espèce contenus dans $\varphi(x,\ \zeta)$ et d'autres logarithmes d'espèce inférieure. On pourra par conséquent répéter ici mot à mot tout ce que nous avons dit au commencement de ce numéro, quand la fonction $\varphi(x,\zeta)$ appartenait à la première espèce, et l'on retombera de nouveau sur l'équation absurde $\varphi(x,\ i)e^{hi_0} = \varphi(x,\ i_0)e^{hi}$. Notre analyse établit donc en toute rigueur le théorème que nous avions en vue, savoir que l'exponentielle e^x ne peut être exprimée par aucune fonction purement logarithmique de la variable x.

§ IV.

Des diverses fonctions que l'on rencontre dans les éléments.

14. Si nous passons maintenant en revue les diverses fonctions de x dont on s'occupe dans les éléments d'algèbre, nous verrons que toutes peuvent s'exprimer sous forme finie, à l'aide des simples fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques. Et nous n'avons pas même besoin de comprendre parmi ces dernières les exponentielles de la forme a^x et les logarithmes $\text{Log}\, x$ dont la base n'est

pas le nombre $e = 2,718\ldots$; car on a $a^x = e^{x \log a}$ et $\operatorname{Log} x = \mathrm{M} \log x$, M désignant le module du système des logarithmes désignés par $\operatorname{Log} x$, par où l'on voit que tous les logarithmes peuvent être transformés en logarithmes népériens, et toutes les exponentielles transformées en d'autres exponentielles rapportées au nombre e.

15. Considérons d'abord les puissances dont l'exposant est un nombre quelconque. Soit α une constante réelle ou imaginaire : la puissance dont il s'agit sera représentée par x^α. Dans le cas très particulier où le nombre α est réel et rationnel, on sait que x^α est une fonction algébrique de x ; car si l'on a $\alpha = \frac{m}{n}$, ou $\alpha = -\frac{m}{n}$, m et n désignant deux nombres entiers positifs, il en résultera

$$x^\alpha = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},$$

ou

$$x^\alpha = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

Mais toutes les fois que la constante α est irrationnelle ou imaginaire, je dis que x^α n'est pas une fonction algébrique de x. Pour le prouver, posons $y = x^\alpha$, ce qui donne

$$x \frac{dy}{dx} = \alpha y.$$

Admettons pour un instant que y soit une fonction algébrique de x, déterminée par une équation irréductible de degré μ, savoir

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre serait une fonction entière de x et y. En différentiant, il vient

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui se transforme dans la suivante

$$x f'_x(x, y) + \alpha y f'_y(x, y) = 0, \tag{2}$$

lorsqu'on remplace $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\frac{\alpha y}{x}$ et qu'on chasse ensuite le dénominateur x. Pour que l'équation $x\frac{dy}{dx}=\alpha y$ soit satisfaite, il est donc nécessaire que les deux équations (1) et (2) aient lieu en même temps, sans qu'on soit obligé d'attribuer à x une valeur particulière; et comme l'équation (1) est irréductible, une de ses racines, y_1 par exemple, ne peut satisfaire à l'équation (2), sans que toutes les autres y_2, y_3, ... y_μ, n'y satisfassent aussi. Donc, si l'intégrale particulière $y=y_1$ vérifie l'équation $x\frac{dy}{dx}=\alpha y$, les intégrales particulières $y=y_2$, $y=y_3$, ... $y=y_\mu$, la vérifieront également. Les racines y_1, y_2, ... y_μ étant différentes de zéro par la nature même de l'équation irréductible (1), il résulte de la théorie des équations linéaires que la valeur de y s'obtiendra en multipliant y_1 par une certaine constante C_1, ou bien en multipliant y_2, ... y_μ par des constantes C_2, ... C_μ: on voit donc qu'il est permis de poser à la fois

$$y=C_1y_1,\quad y=C_2y_2,\quad y=C_3y_3,\ldots y=C_\mu y_\mu:$$

je multiplie ces équations membre à membre, et en représentant par C^μ le produit $C_1C_2C_3\ldots C_\mu$, je trouve

$$y^\mu=C^\mu y_1y_2y_3\ldots y_\mu,$$

d'où je tire

$$y=C\sqrt[\mu]{y_1y_2y_3\ldots y_\mu}.$$

Le produit $y_1y_2y_3\ldots y_\mu$ n'est pas nul, puisque l'équation (1) étant irréductible, n'a pas de racine nulle; c'est d'ailleurs une fonction rationnelle et symétrique de y_1, y_2, etc. et par suite une fonction rationnelle de x, que l'on peut représenter par le quotient $\frac{X}{Y}$ de deux polynomes entiers premiers entre eux. Donc si la fonction $y=x^\alpha$ peut s'exprimer algébriquement, sa valeur sera de la forme

$$y=C\sqrt[\mu]{\frac{X}{Y}}.$$

En différentiant cette valeur, je trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\mu} \cdot \frac{YX' - XY'}{XY},$$

et, comme j'ai d'ailleurs $x\frac{dy}{dx} = \alpha y$, j'en conclus

$$\frac{x}{\mu}(YX' - XY') = \alpha XY.$$

Cette équation nous prouve que XY est divisible par x, et que par conséquent un des deux facteurs X ou Y l'est aussi; car ils ne peuvent pas l'être tous deux à la fois, puisqu'on les suppose premiers entre eux. Admettons d'abord que $\frac{X}{x}$ soit une fonction entière. Il est alors permis de faire $X = Zx^n$, n étant un nombre entier $>$ o et Z un nouveau polynome non divisible par x : on a donc

$$X' = nZx^{n-1} + Z'x^n.$$

Portant cette valeur et celle de X dans l'équation précédente, on obtient

$$\frac{x}{\mu}(nYZx^{n-1} + YZ'x^n - ZY'x^n) = \alpha YZx^n,$$

équation qu'on peut écrire ainsi

$$\left(\frac{n}{\mu} - \alpha\right) YZ = \frac{x}{\mu}(ZY' - YZ'),$$

et dont l'absurdité est manifeste toutes les fois que α est une constante irrationnelle ou imaginaire. En effet, dans cette hypothèse, le coefficient $\frac{n}{\mu} - \alpha$, ne peut pas être nul, puisqu'en posant $\alpha = \frac{n}{\mu}$ la valeur de α serait le quotient de deux nombres entiers réels. Par conséquent le premier membre, où se trouvent les deux facteurs Y et Z premiers avec x, est aussi premier avec x, tandis que dans le second membre, ce facteur x est au contraire mis en évidence. En posant $Y = Zx^n$, on arrivera de même à une équation absurde, savoir,

$$\left(\frac{n}{\mu} + \alpha\right) XZ = \frac{x}{\mu}(ZX' - XZ').$$

Donc y ou x^α ne peut pas avoir une valeur de la forme $C\sqrt[\mu]{\frac{X}{Y}}$: donc x^α ne peut s'exprimer par aucune fonction algébrique de x. Il est d'ailleurs aisé de voir que cette quantité peut être représentée par des exponentielles et des logarithmes, puisque l'on a $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$.

16. Viennent ensuite les exponentielles dont la base et l'exposant à la fois sont des fonctions de la variable, exponentielles dont la quantité x^x nous offre un exemple. Il est bien facile de prouver que l'on n'a pas $x^x = y$, y étant une fonction algébrique; car en différentiant cette équation, on trouverait

$$y(1 + \log x) = y',$$

d'où l'on déduirait $\log x = \frac{y'}{y} - 1 =$ *fonction algébrique de* x, ce qui est absurde. Mais cette fonction x^x, et la fonction plus compliquée q^p dans laquelle p et q sont deux fonctions algébriques quelconques de x, peuvent s'écrire sous forme finie avec les signes logarithmiques et exponentiels, puisque l'on a

$$x^x = e^{x \log x}, \quad q^p = e^{p \log q}.$$

17. Je m'occuperai en dernier lieu des fonctions circulaires. Et d'abord s'il s'agit du cosinus, on a par une formule connue d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}:$$

donc la quantité $\cos x$ s'exprime en exponentielles imaginaires, et il en est de même de $\sin x$ et des autres lignes trigonométriques, puisque l'on a

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \text{ etc.}$$

Il nous sera aisé de prouver en passant que ces lignes trigonométriques ne sont point exprimables en fonction algébrique de x, car si l'on avait par exemple $\cos x = f(x)$, f dénotant une fonction algébrique, on aurait aussi

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=f(x),$$

et il en résulterait

$$e^{x\sqrt{-1}}=f(x)\pm\sqrt{f(x)^2-1},$$

c'est-à-dire $e^{x\sqrt{-1}}$ = *une fonction algébrique de x*, ce qui ne se peut.

Les fonctions trigonométriques inverses ne sont pas non plus algébriques, mais elles s'expriment par des logarithmes au moyen des formules de Jean Bernouilli

$$\text{arc}\sin x=\frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$\text{arc}\,\text{tang}\, x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right).$$

. . . .

En résumé, les fonctions que l'on rencontre dans les éléments peuvent toutes s'écrire sous forme finie à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques; ce que nous nous proposions d'établir.

§ V.

Comment on peut reconnaître d'une manière précise à quelle espèce appartient une fonction finie explicite donnée.

18. D'après la classification des fonctions finies explicites adoptée par nous au paragraphe deuxième de ce mémoire, une fonction finie explicite de la $n^{ième}$ espèce ne peut renfermer dans chacun de ses termes plus de n opérations transcendantes portant successivement l'une sur l'autre; mais de ce qu'une fonction finie explicite renferme un ou plusieurs termes affectés de n opérations transcendantes successives, il n'en résulte pas nécessairement qu'elle appartienne à la $n^{ième}$ espèce:

au contraire il peut arriver qu'elle appartienne à une espèce inférieure à la $n^{ième}$ ou même qu'elle soit purement algébrique. Aussi avant d'affirmer qu'une fonction finie donnée appartient à une espèce ou à une autre, est-il nécessaire de réduire autant que possible les signes exponentiels et logarithmiques, qui se succèdent et qui souvent peuvent s'entre-détruire.

Si vous considérez, par exemple, les fonctions $\log(xe^x)$, $\log(e^{x^2})$, qui sous leur forme actuelle paraissent appartenir à la seconde espèce, vous n'aurez qu'à les écrire ainsi $\log(xe^x) = \log x + x$, $\log(e^{x^2}) = x^2$, pour reconnaître que l'une d'elles est de premiere espèce et que l'autre est purement algébrique.

Ces réflexions conduisent à un problème nouveau difficile autant qu'utile et dont voici l'énoncé : *Étant donnée une fonction finie explicite, trouver une méthode exacte qui fasse connaître avec certitude à quelle espèce cette fonction donnée appartient.* Sans essayer de traiter ce problème dans toute sa généralité, nous allons montrer, par des exemples choisis, quels principes on doit employer pour le résoudre dans chaque cas particulier. Mais, avant d'entrer en matière, il faut démontrer un théorème dont nous ferons, dans ce qui va suivre, un fréquent usage.

19. Soient A, B,...C, des constantes quelconques et x une variable indépendante : je dis qu'il est impossible de trouver des fonctions u, v,...w, algébriques en x et telles que l'on ait

$$(1)\qquad A\log u + B\log v + \ldots + C\log w = x.$$

Pour établir ce théorème, nous ferons voir que l'équation (1), si elle était admise (u, v,...w désignant des fonctions algébriques de x) conduirait à une absurdité.

En effet soit θ une fonction algébrique de x, telle que toutes les quantités u, v,...w puissent être regardées comme des fonctions rationnelles de x et θ, et qu'il en soit de même par conséquent de leurs dérivées u', v',...w'. Il existe une infinité de fonctions θ qui jouissent de cette propriété, et l'on peut prendre, par exemple, $\theta = \alpha u + \beta v + \ldots + \gamma w$, α, β,...γ, étant des constantes arbitraires. Puisque θ est algébrique en x, on peut regarder cette quantité comme la racine d'une équation irréductible $f(x, \theta) = 0$, $f(x, \theta)$

désignant un polynome entier par rapport à x et θ, et de degré μ relativement à cette dernière lettre.

Cela posé, en différentiant l'équation (1), il vient

$$\frac{Au'}{u} + \frac{Bv'}{v} + \ldots + \frac{Cw'}{w} = 1.$$

D'après ce qu'on a dit plus haut, le premier membre de cette équation est une fonction rationnelle de x et θ, ou peut facilement se transformer en une telle fonction. Ce premier membre doit être égal à l'unité, en prenant pour θ une des racines de l'équation irréductible $f(x, \theta) = 0$: donc, par le théorème du n° 3, il devra aussi se réduire à l'unité pour toutes les autres racines.

D'après cela, en nommant $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\mu$ les μ racines de l'équation $f(x, \theta) = 0$, puis $u_1, v_1, \ldots w_1, u'_1, v'_1, \ldots w'_1$ les valeurs correspondantes de $u, v, \ldots w, u', v', \ldots w'$, on aura quel que soit x :

$$\frac{Au'_1}{u_1} + \frac{Bv'_1}{v_1} + \ldots + \frac{Cw'_1}{w_1} = 1,$$
$$\frac{Au'_2}{u_2} + \frac{Bv'_2}{v_2} + \ldots + \frac{Cw'_2}{w_2} = 1,$$
$$\frac{Au'_\mu}{u} + \frac{Bv'_\mu}{v_\mu} + \ldots + \frac{Cw'_\mu}{w_\mu} = 1.$$

Je multiplie ces équations par dx et je les ajoute, ce qui, en ayant égard à la relation

$$\frac{u'_1}{u_1} dx + \frac{u'_2}{u_2} dx + \ldots + \frac{u'_\mu}{u_\mu} dx = d \log (u_1 u_2 \ldots u_\mu),$$

me donne

$$A d\log(u_1 u_2 \ldots u_\mu) + B d\log(v_1 v_2 \ldots v_\mu) + \ldots + C d\log(w_1 w_2 \ldots w_\mu) = \mu dx :$$

or les produits $u_1 u_2 \ldots u_\mu$, $v_1 v_2 \ldots v_\mu$, $w_1 w_2 \ldots w_\mu$ sont des fonctions rationnelles de α, θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_\mu$, symétriques en θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_\mu$: donc, par un théorème connu, on peut les exprimer rationnellement en x et les représenter respectivement par X, Y, ... Z.

D'où l'on voit que si l'équation (1) était possible, on pourrait trouver des fonctions rationnelles de x, savoir $X, Y, \ldots Z$, propres à satisfaire à l'autre équation

$$(2)\qquad A d\log X + B d\log Y + \ldots + C d\log Z = dx.$$

On sait (nº 19) que toute fonction rationnelle X peut se mettre sous la forme

$$X = M(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma},$$

et on pourra écrire de même

$$Y = M_1(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\beta_1}\ldots(x-c)^{\gamma_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z = M_i(x-a)^{\alpha_i}(x-b)^{\beta_i}\ldots(x-c)^{\gamma_i}.$$

En posant, pour abreger,

$$\begin{aligned} A\alpha + B\alpha_1 + \ldots + C\alpha_i &= N,\\ A\beta + B\beta_1 + \ldots + B\beta_i &= P,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\\ A\gamma + B\gamma_1 + \ldots + C\gamma_i &= Q, \end{aligned}$$

l'équation (2) deviendra donc

$$\frac{N}{x-a} + \frac{P}{x-b} + \ldots + \frac{Q}{x-c} = 1.$$

Quelques-uns des coefficients $N, P, \ldots Q$ peuvent être nuls; mais comme tous ne doivent pas s'annuler à la fois, supposons N différent de zéro. L'équation précédente peut s'écrire ainsi

$$\frac{N}{x-a} = 1 - \frac{P}{x-b} - \ldots - \frac{Q}{x-c}:$$

je puis représenter la quantité

$$1 - \frac{P}{x-b} - \ldots - \frac{Q}{x-c},$$

par

$$\frac{U}{(x-b)\ldots(x-c)},$$

U étant une fonction entière de x : j'aurai donc

$$\frac{\mathrm{N}}{x-a} = \frac{\mathrm{U}}{(x-b)\ldots(x-c)},$$

d'où je tire enfin

$$\mathrm{N}(x-b)\ldots(x-c) = \mathrm{U}(x-a),$$

equation absurde, puisque le second membre est divisible et le premier membre non divisible par $x-a$. Donc, en partant de l'équation (1) supposée possible, on est inévitablement conduit à une absurdité : donc une telle équation ne peut pas exister.

En nommant $u, v, \ldots w, t$, des fonctions algébriques quelconques de x dont la dernière ne se réduit pas à une simple constante, on ne pourra pas davantage avoir l'équation

$$\mathrm{A}\log u + \mathrm{B}\log v + \ldots + \mathrm{C}\log w = t,$$

car rien n'empêchera de regarder alors x comme une fonction algébrique de t, et par suite $u, v, \ldots w$, comme des fonctions algébriques de cette même lettre t, ce qui réduira la nouvelle équation à la forme de l'équation (1).

20. Actuellement considérons la fonction x^α, α étant une constante irrationnelle ou imaginaire : cette fonction, comme nous l'avons vu n° 15, n'est point algébrique; elle est transcendante. Mais à quelle espèce appartient-elle? C'est là ce que nous ignorons jusqu'ici. Concevons donc qu'on nous propose de décider par une méthode certaine dans quelle classe cette fonction doit être rangée. D'abord, puisque l'on a $x^\alpha = e^{\alpha\log x}$, la quantité x^α que nous désignerons désormais par y est tout au plus de seconde espèce, et elle sera vraiment de seconde espèce si nous montrons qu'elle ne peut pas descendre à la première. C'est ce que nous allons faire à l'instant.

Pour développer notre démonstration dans laquelle, suivant notre usage, nous aurons recours au principe de la réduction à l'absurde, admettons qu'il soit possible de trouver une fonction de première espèce équivalente à y. Réduisons à son minimum le nombre des transcendantes monomes contenues dans cette fonction, et soit, s'il est possible, $\theta = \log u$ une de ces transcendantes, u étant algébrique ; la valeur de y dans cette hypothèse sera de la forme

$$y = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et contenant en outre, algébriquement aussi, d'autres transcendantes monomes dont il est inutile de parler ici. Il viendra donc

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}.$$

Mais l'équation $y = x^\alpha$ nous donne d'autre part $\frac{dy}{ydx} = \frac{\alpha}{x}$: il en résulte, en remplaçant y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs :

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\alpha}{x}.$$

Cette équation étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes contenues dans $\varphi(x, \theta)$, on peut y remplacer θ par $\mu + \theta$, μ étant une constante indéterminée : cela nous donne

$$\frac{\varphi'_x(x, \mu + \theta) + \varphi'_\theta(x, \mu + \theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\alpha}{x}:$$

ainsi l'on a quel que soit μ

$$\frac{d\varphi(x, \mu + \theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\alpha dx}{x},$$

et par suite

$$\frac{d\varphi(x, \mu + \theta)}{\varphi(x, \mu + \theta)} = \frac{d\varphi(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)}.$$

J'intègre cette dernière équation, et déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière $x = b$ à laquelle répond $\theta = a$, j'obtiens

$$\varphi(b, a)\,\varphi(x, \mu + \theta) = \varphi(x, \theta)\varphi(b, \mu + a).$$

Cette équation subsistant pour toutes les valeurs de μ, je puis la différentier par rapport à μ et poser ensuite $\mu = 0$; or l'équation nouvelle

$$\varphi(b, a)\varphi'_\theta(x, \theta) = \varphi(x, \theta)\varphi'_a(b, a),$$

qui résulte de cette opération, est algébrique par rapport aux transcendantes θ, etc., en sorte que l'on peut remplacer θ par une lettre indéterminée i considérée comme variable indépendante. Il vient par-là

$$\varphi(b, a)\varphi'_i(x, i) = \varphi(x, i)\varphi'_a(b, a),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i)} = \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)}.$$

Multipliant donc les deux membres de l'équation que je viens d'écrire par di, puis intégrant par rapport à i et déterminant la constante arbitraire produite par l'intégration à l'aide d'une valeur particulière $i = i_0$, on a

$$\log \varphi(x, i) = \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)}(i - i_0) + \log \varphi(x, i_0),$$

résultat absurde, puisque le logarithme d'une fonction algébrique de i se trouverait exprimé par une autre fonction algébrique de cette même lettre i. Donc si la quantité y est exprimable par une fonction transcendante de première espèce, cette fonction ne peut contenir aucun logarithme, mais seulement des exponentielles.

Continuons à la représenter par $\varphi(x, \theta)$, θ étant non plus un logarithme, mais bien une exponentielle de la forme e^u, u étant algébrique, et cette exponentielle entrant algébriquement seule ou avec d'autres dans la fonction $\varphi(x, \theta)$. L'absurdité de l'équation $y = \varphi(x, \theta)$ ainsi définie sera facile à établir : on en déduit en effet

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u',$$

à cause de $\frac{dx}{ydx} = \frac{a}{x}$ il vient d'après cela

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\theta u'}{\varphi(x, \theta)} = \frac{a}{x};$$

équation algébrique par rapport aux exponentielles θ, etc., où l'on peut changer θ en $\mu\theta$ (μ étant une lettre indéterminée), ce qui fournit

$$\frac{\varphi'_x(x,\mu\theta)+\varphi'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\mu\theta u'}{\varphi(x,\mu\theta)}=\frac{n}{x},$$

ou

$$\frac{d\varphi(x,\mu\theta)}{\varphi(x,\mu\theta)}=\frac{ndx}{x},$$

on conclut de là que

$$\frac{d\varphi(x,\mu\theta)}{\varphi(x,\mu\theta)}=\frac{d\varphi(x,\theta)}{\varphi(x,\theta)}.$$

Intégrant cette dernière équation et nommant a la valeur de θ qui répond à une valeur quelconque $x=b$, on obtient

$$\varphi(b,a)\varphi(x,\mu\theta)=\varphi(x,\theta)\varphi(b,\mu a).$$

Je différentie par rapport à μ l'équation que je viens d'écrire; je fais ensuite $\mu=1$, et j'ai

$$\theta\varphi(b,a)\varphi'_\theta(x,\theta)=a\varphi(x,\theta)\varphi'_a(b,a),$$

équation dans laquelle on peut (n° 9) remplacer θ par une lettre indéterminée i, ce qui donne

$$\frac{\varphi'_i(x,i)}{\varphi(x,i)}=\frac{a\varphi_a(b,a)}{\varphi(b,a).i}.$$

Je pose pour abréger

$$\frac{a\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)}=m,$$

et je multiplie par di les deux membres de l'équation

$$\frac{\varphi'_i(x,i)}{\varphi(x,i)}=\frac{m}{i}:$$

j'intègre ensuite par rapport à i: en représentant par i_0 une valeur particulière quelconque de i, j'obtiens

$$\varphi(x,i)=\frac{\varphi(x,i_0)}{i_0^m}.$$

Puisque la lettre i est tout-à-fait indéterminée, et que l'équation précédente est identique par rapport à cette lettre, rien n'empêche de faire $i = \theta = e^u$. C'est ainsi que l'on trouve

$$y \text{ ou } \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, i_0)}{i_0^m} \cdot e^{mu}.$$

Ainsi notre analyse nous fait connaître la seule forme sous laquelle une exponentielle e^u ou e^{mu} pourra entrer dans l'expression de $\varphi(x, \theta)$. Cette exponentielle s'y trouve nécessairement en facteur à tous les termes : il en est de même des autres exponentielles $e^v \ldots e^w$, ou si l'on veut $e^{nv}, \ldots e^{pw}$ ($n, \ldots p$ étant des constantes et $v, \ldots w$, des fonctions algébriques de x), que l'on regardera comme renfermées dans cette fonction. D'ailleurs en posant $mu + nv + \ldots + pw = t$, le produit $e^{mu} . e^{nv} \ldots e^{pw}$ sera égal à e^t : donc la fonction $\varphi(x, \theta)$ ne peut être que de la forme

$$\varphi(x, \theta) = ze^t,$$

z et t désignant des fonctions algébriques de x : puisque l'on a à la fois $\varphi(x, \theta) = x^\alpha$ et $\varphi(x, \theta) = ze^t$, il vient

$$x^\alpha = ze^t,$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes,

$$\alpha \log x - \log z = t :$$

or on a vu au n° 19 qu'une équation de cette dernière forme est toujours impossible. A la vérité dans ce n° 19 la fonction t est supposée ne pas pouvoir se réduire à une simple constante. Mais c'est ce qui a lieu ici, car si t était une constante, le produit ze^t et par suite la fonction x^α se trouverait fonction algébrique de x, ce qui n'est pas (n° 15).

Concluons de cette discussion que, toutes les fois que l'exposant α est irrationnel ou imaginaire, la fonction x^α est transcendante de seconde espèce, en sorte qu'on ne peut espérer de l'exprimer ni par des quantités algébriques, ni par des transcendantes de première espèce.

Comme second exemple, proposons-nous de chercher à quelle espèce appartient la fonction $\log \log x$.

D'abord il est clair qu'on ne peut pas avoir

$$\log \log x = \textit{une fonction algébrique } f(x),$$

car on en déduirait par la différentiation

$$\frac{1}{x \log x} = f'(x),$$

et par suite $\log x =$ une fonction algébrique de x, ce qui est absurde.

A présent je dis que la quantité $\log \log x$ n'est équivalente à aucune fonction transcendante de première espèce, ou (ce qui revient au même) je dis qu'on ne peut pas avoir $\log \log x =$ une fonction algébrique de x, d'une ou de plusieurs exponentielles de la forme e^u, et d'un ou de plusieurs logarithmes de la forme $\log u$, u étant algébrique en x.

Car si une telle équation est possible, nommons θ ou e^u une des exponentielles que l'on suppose contenues dans son second membre, et pour mettre θ en évidence posons simplement

$$\log \log x = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et contenant en outre, algébriquement aussi, des exponentielles et des logarithmes dont il est inutile de faire mention. Nous supposerons (ce qui est permis) le nombre des exponentielles renfermées dans la fonction φ réduit à son minimum, et dès-lors il ne pourra exister entre ces exponentielles, la variable x, et des logarithmes de première espèce, aucune équation algébrique, à moins que cette équation ne soit identique.

On produira une équation du genre de celle dont nous venons de parler, en différentiant l'égalité

$$\log \log x = \varphi(x, \theta),$$

ce qui donnera

$$\frac{1}{x \log x} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\, \theta u'.$$

Dans cette dernière équation qui doit être identique, on pourra donc remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une lettre indéterminée : il viendra ainsi

$$\frac{1}{x\log x} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_{\mu\theta}(x, \mu\theta)\mu\theta u',$$

d'où l'on conclut aisément

$$d\varphi(x, \mu\theta) = d\varphi(x, \theta).$$

le signe d indique une différentielle totale prise par rapport à x et par rapport à θ qui est fonction de x. Intégrant donc et déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $x = b$, à laquelle répond $\theta = a$, on aura

$$\varphi(x, \mu\theta) = \varphi(x, \theta) + \varphi(b, \mu a) - \varphi(b, a),$$

équation de laquelle je déduis, en différentiant par rapport à μ, et posant ensuite $\mu = 1$,

$$\theta\varphi'_\theta(x, \theta) = a\varphi'_a(b, a).$$

Ici, puisque l'équation est algébrique par rapport à θ et aux autres transcendantes contenues dans la fonction φ, je puis remplacer θ par une variable indépendante i. J'obtiens de la sorte

$$\varphi'_i(x, i)di = \frac{a\varphi'_a(b, a)\,di}{i},$$

d'où je conclus, en intégrant par rapport à i et représentant par i_0 une valeur particulière de i,

$$\varphi(x, i) = a\varphi'_a(b, a)(\log i - \log i_0) + \varphi(x, i_0):$$

or, si la dérivée $\varphi'_a(b, a)$ n'est pas nulle, cette équation est absurde, puisqu'elle fournit pour $\log i$ une valeur algébrique en i, et si l'on suppose $\varphi'_a(b, a) = 0$, elle donne

$$\varphi(x, i) = \varphi(x, i_0),$$

c'est-à-dire que la quantité $\varphi(x, i)$ est indépendante de i : donc l'exponentielle θ n'entre pas dans la quantité $\varphi(x, \theta)$, d'où résulte immédiatement que cette quantité ne peut renfermer aucune exponentielle.

Si donc la valeur de $\log\log x$ est exprimable par une transcendante de première espèce, elle ne pourra contenir que des logarithmes et point d'exponentielles. Soit $\theta = \log u$ l'un de ces logarithmes, u étant algébrique. Pour mettre θ en évidence, nous écrirons simplement suivant notre usage

$$\log\log x = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ.

Les logarithmes qui entrent dans cette fonction φ ou portent sur la simple variable x et sont de la forme $\log x$, ou portent sur des quantités algébriques différentes de x. Rien ne m'empêche de supposer le nombre de ces derniers réduit à son minimum, et dès-lors il ne pourra exister aucune relation algébrique entre eux et les deux quantités x et $\log x$. On s'en convaincra aisément par un raisonnement analogue à celui du n° 9. Reprenons donc l'équation.... $\log\log x = \varphi(x, \theta)$, et supposons que θ soit différent de $\log x$. En différentiant cette équation, j'en obtiens une autre, savoir

$$\frac{1}{x\log x} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u},$$

laquelle est algébrique par rapport à x, $\log x$, θ et par rapport aux autres transcendantes contenues dans la fonction φ, ce qui me permet de changer, quel que soit μ, θ en $\mu + \theta$, et me donne

$$\frac{1}{x\log x} = \varphi'_x(x, \mu+\theta) + \varphi'_\theta(x, \mu+\theta)\,\frac{u'}{u}.$$

J'égale ces deux valeurs de $\frac{1}{x\log x}$, et j'obtiens

$$\varphi'_x(x, \mu+\theta) + \varphi'_\theta(x, \mu+\theta)\frac{u'}{u} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\frac{u'}{u}.$$

Multipliant les deux membres par dx, et intégrant dans l'hypothèse que pour $x = b$ on a $\theta = a$, je trouve

$$\varphi(x,\ \mu+\theta)=\varphi(x,\ \theta)+\varphi(b,\ \mu+a)-\varphi(b,\ a).$$

Je différentie cette équation par rapport à μ et je pose $\mu=0$ après la différentiation : j'ai ainsi

$$\varphi'_\theta(x,\ \theta)=\varphi'_a(b,\ a),$$

relation algébrique par rapport à $\log x$, θ, et où je puis remplacer θ par une lettre indéterminée i. Multipliant donc par di et intégrant par rapport à i l'équation nouvelle

$$\varphi'_i(x,\ i)=\varphi'_a(b,\ a)$$

à laquelle ce raisonnement conduit, puis désignant par i_0 une valeur particulière quelconque de i, je trouve

$$\varphi(x,\ i)=\varphi'_a(b,\ a)(i-i_0)+\varphi(x,\ i_0).$$

Dans la fonction $\varphi(x, i)$ la quantité i entre donc sous forme linéaire et avec un coefficient indépendant de x. Dans la fonction $\varphi(x, \theta)$ la quantité θ entrera donc aussi sous forme linéaire avec un coefficient constant : dès-lors si nous désignons par $\log u$, $\log v, \ldots \log w$, les logarithmes autres que $\log x$ entrant dans $\varphi(x, \theta)$ et par A, B,...C des constantes, la valeur de $\varphi(x, \theta)$ ou $\log\log x$ ne pourra être que de la forme

$$\log\log x=\mathrm{A}\log u+\mathrm{B}\log v+\ldots+\mathrm{C}\log w+\Psi(x,\ \log x),$$

$\Psi(x, \log x)$ étant une certaine fonction algébrique de x et $\log x$.

Pour abréger je pose $\log x=\zeta$: il vient

$$\log\zeta=\mathrm{A}\log u+\mathrm{B}\log v+\ldots+\mathrm{C}\log w+\Psi(x,\ \zeta),$$

d'où je déduis, en différentiant et observant que $d\zeta=\frac{dx}{x}$,

$$\frac{1}{x\zeta}=\frac{\mathrm{A}u'}{u}+\frac{\mathrm{B}v'}{v}+\ldots+\frac{\mathrm{C}w'}{w}+\Psi'_x(x,\ \zeta)+\frac{1}{x}\Psi'_\zeta(x,\ \zeta):$$

or si cette équation n'est pas identique par rapport à ζ elle est absurde, puisqu'elle fournirait alors pour ζ ou $\log x$ une valeur algébrique en x. Si au contraire elle est identique par rapport à ζ, on pourra y changer ζ en $\mu+\zeta$, μ étant une lettre indéterminée, indépendante de x, et l'on aura

$$\frac{1}{x(\mu+\zeta)} = A\frac{u'}{u} + B\frac{v'}{v} + \ldots + C\frac{w'}{w}$$
$$+ \Psi'_x(x,\ \mu+\zeta) + \frac{1}{x}\Psi'_\zeta(x,\ \mu+\zeta).$$

Je multiplie les deux membres de cette équation par dx, après quoi j'intègre par rapport à x: je trouve ainsi un résultat de la forme

$$\log(\mu+\zeta) = A\log\frac{u}{u_0} + B\log\frac{v}{v_0} + \ldots + C\log\frac{w}{w_0}$$
$$+ \Psi(x,\ \mu+\zeta) - \Psi(b,\ \mu+a) + \log(\mu+a),$$

b désignant une valeur particulière quelconque de x, et a, u_0, v_0,...w_0 étant les valeurs de ζ, u, v,...w, pour $x = b$.

Maintenant je différentie par rapport à μ l'équation que je viens d'écrire, et posant $\mu = 0$, après la différentiation, j'obtiens

$$\frac{1}{\zeta} = \Psi'_\zeta(x,\ \zeta) - \Psi'_a(b,\ a) + \frac{1}{a},$$

équation algébrique entre x et ζ, qui doit être identique en ζ et où l'on peut par conséquent remplacer ζ par une lettre indéterminée i. Mais l'équation

$$\frac{1}{i} = \Psi'_i(x,\ i) - \Psi'_a(b,\ a) + \frac{1}{a}$$

sur laquelle je tombe par le changement de ζ en i, étant multipliée par di et intégrée par rapport à i, me conduit à une autre équation

$$\log i = \Psi(x,\ i) - \Psi(x,\ i_0) - \left[\Psi'_a(b,\ a) - \frac{1}{a}\right](i - i_0) + \log i_0,$$

dans laquelle i_0 est une valeur particulière de i, et qui doit être regardée comme absurde, puisqu'elle fournit pour $\log i$ une valeur

14..

algébrique en i. Donc quoi qu'on fasse, on est conduit à une absurdité en regardant la transcendante $\log\log x$ comme réductible à la première espèce, ce qu'il fallait démontrer.

Étant donnée une fonction finie explicite quelconque $f(x)$, si l'on veut décider d'une manière certaine à quelle espèce cette fonction appartient, il faudra évidemment faire usage d'une méthode semblable à celle que nous venons d'employer pour les fonctions particulières x^x, $\log\log x$. Cette méthode est fondée sur un principe général : néanmoins, dans la pratique, il restera à vaincre les difficultés propres à chaque exemple. Au reste on trouvera là-dessus de nouveaux détails dans le paragraphe suivant.

(*La suite à un autre cahier.*)