JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAGÈS

Note sur une propriété des sections coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 437-438.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__437_0>

NOTE

Sur une propriété des sections coniques;

Par M. E. PAGÈS.

Si, par un point quelconque d'une section conique, on mène les deux rayons vecteurs et une normale terminée à l'axe des foyers, la projection de cette normale sur l'un quelconque des deux rayons vecteurs sera égale au paramètre. Considérons d'abord une ellipse : soient z et z' les deux rayons vecteurs, n la normale, p sa projection sur chacun des deux rayons vecteurs, h et k les distances du pied de cette normale aux deux foyers : soient de plus $2a$ le grand axe, $2b$ le petit axe et $2c$ la distance des foyers, de telle manière que $z+z'=2a$, $h+k=2c$, $a^2-c^2=b^2$. On aura, d'après les propriétés des triangles obliquangles,

$$h^2 = z^2 + n^2 - 2pz,$$
$$k^2 = z'^2 + n^2 - 2pz';$$

retranchant ces deux équations membre à membre, il vient

$$(h+k)(h-k) = (z-z')(z+z'-2p),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$c(h-k) = (z-z')(a-p).$$

De cette équation on déduit

$$c : a-p :: z-z' : h-k. \qquad (1)$$

La propriété qu'a la normale de partager l'angle des rayons vecteurs en deux parties égales, donne la proportion

$$z : z' :: h : k,$$

on en déduit

$$z + z' : h + k :: z - z' : h - k,$$

ou

$$a : c :: z - z' : h - k.$$

Cette proportion combinée avec la proportion (1) donne

$$c : a - p :: a : c,$$

d'où

$$p = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \text{paramètre}.$$

Le même mode de démonstration s'applique à l'hyperbole.

Dans le cas de la parabole, l'un des foyers se transportant à l'infini, le rayon vecteur correspondant devient parallèle à l'axe, et la projection sur ce rayon est égale à la projection sur l'axe; ce qui explique pourquoi dans cette courbe la sous-normale est constante.

En rapprochant le théorème que nous avons démontré de la propriété qu'a le rayon de courbure d'être proportionnel au cube de la normale, on trouve que le produit

$$r \cos^3 i = \text{paramètre},$$

r et i désignant le rayon de courbure et l'angle qu'il fait avec le rayon vecteur. De cette formule, on déduit une construction géométrique du rayon de courbure donnée par M. Abel Transon dans le tome premier de ce journal.