JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUG. CAUCHY

Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 406-412.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__406_0>

NOTE

Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique ;

PAR M. AUG. CAUCHY (*).

1. Soient données, entre la variable t, n fonctions de t désignées par $x, y, z\ldots$, et n autres fonctions de t désignées par $u, v, w\ldots$, $2n$ équations différentielles du premier ordre et de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=\frac{dQ}{du},\ \frac{dy}{dt}=\frac{dQ}{dv},\ \frac{dz}{dt}=\frac{dQ}{dw}\ldots, \\ \frac{du}{dt}=-\frac{dQ}{dx},\ \frac{dv}{dt}=-\frac{dQ}{dy},\ \frac{dw}{dt}=-\frac{dQ}{dz}\ldots, \end{array}\right.$$

Q représentant une fonction de $x, y, z\ldots, u, v, w\ldots, t$. On pourra supposer les inconnues $x, y, z\ldots, u, v, w\ldots$, exprimées en fonction de t et de $2n$ constantes arbitraires $a, b, c\ldots$; et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$\frac{dQ}{da}=\frac{dQ}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{dQ}{dy}\frac{dy}{da}+\ldots+\frac{dQ}{du}\frac{du}{da}+\ldots;$$

(*) Cet article fait partie d'un très long mémoire sur la Mécanique céleste qui a été présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831 et dont on peut voir un extrait dans le *Bulletin universel des Sciences* de M. Férussac.

(J. LIOUVILLE.)

par conséquent

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dQ}{da} = -\frac{du}{dt}\frac{dx}{da} - \frac{dv}{dt}\frac{dy}{da} - \ldots + \frac{dx}{dt}\frac{du}{da} + \ldots, \\ &\text{on trouvera de même} \\ &\frac{dQ}{db} = -\frac{du}{dt}\frac{dx}{db} - \frac{dv}{dt}\frac{dy}{db} - \ldots + \frac{dx}{dt}\frac{du}{db} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

Si de la seconde des équations (2), différentiée par rapport à la quantité a, on retranche la première différentiée par rapport à b, on obtiendra la suivante,

$$(3)\qquad \frac{d\cdot[a,\, b]}{dt} = 0,$$

la valeur de $[a,\, b]$ étant

$$(4)\qquad [a,\, b] = \frac{dx}{da}\frac{du}{db} - \frac{dx}{db}\frac{du}{da} + \frac{dy}{da}\frac{dv}{db} - \frac{dy}{db}\frac{dv}{da} + \ldots,$$

puis, en intégrant l'équation (3), on trouvera

$$(5)\qquad [a,\, b] = \text{constante}.$$

Donc, les quantités représentées par les symboles $[a,\, b]$, $[a,\, c]$,... $[b,\, c]$,... seront indépendantes de t. Observons d'ailleurs qu'en vertu de la formule (4), on aura généralement

$$[a,\, a] = 0, \quad \text{et} \quad [a,\, b] = -[b,\, a].$$

Soient maintenant

$$A = a, \quad B = b, \quad C = c, \quad \text{etc.} \ldots$$

les intégrales générales des équations (1), A, B, C,... désignant des fonctions déterminées des seules variables $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$.

Faisons de plus

$$(7)\qquad (A, B) = \frac{dA}{dx}\frac{dB}{du} - \frac{dA}{du}\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\frac{dB}{dv} - \frac{dA}{dv}\frac{dB}{dy} +$$

on aura encore

$$(A, A) = 0, \quad (A, B) = -(B, A).$$

D'ailleurs, si, dans l'équation qui détermine x en fonction de $a, b, c, \ldots t$, on substitue A, B, C,... au lieu de $a, b, c, \ldots$, on obtiendra une formule identique, qui, différentiée successivement par rapport à $x, y, z, \ldots u, \ldots$ donnera

$$(8)\quad 1 = \frac{dx}{da}\frac{dA}{dx} + \frac{dx}{db}\frac{dB}{dx} + \ldots, \quad 0 = \frac{dx}{da}\frac{dA}{dy} + \frac{dx}{db}\frac{dB}{dy} + \ldots, \quad 0 = \text{etc}\ldots,$$

et, si l'on ajoute entre elles les valeurs de (A, A), (A, B), (A, C),... respectivement multipliées par $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}, \ldots$ on trouvera, en ayant égard aux formules (8),

$$(9)\left\{\begin{array}{l} (A, A)\frac{dx}{da} + (A, B)\frac{dx}{db} + (A, C)\frac{dx}{dc} + \ldots = -\frac{dA}{du}; \\ \text{on trouvera de même,} \\ (A, A)\frac{dy}{da} + (A, B)\frac{dy}{db} + (A, C)\frac{dy}{dc} + \ldots = -\frac{dA}{dv}, \\ \quad \text{etc.}\ldots \end{array}\right.$$

Pareillement, si l'on ajoute entre elles les valeurs de (A, A), (A, B), (A, C),... respectivement multipliées par $\frac{du}{da}, \frac{du}{db}, \frac{du}{dc}, \ldots\ldots$ on trouvera

$$(10)\left\{\begin{array}{l} (A, A)\frac{du}{da} + (A, B)\frac{du}{db} + (A, C)\frac{du}{dc} + \ldots = \frac{dA}{dx}; \\ \text{on aura de même} \\ (A, A)\frac{dv}{da} + (A, B)\frac{dv}{db} + (A, C)\frac{dv}{dc} + \ldots = \frac{dA}{dy}, \\ \quad \text{etc.}\ldots \end{array}\right.$$

D'autre part, si l'on différentie successivement la première des formules (6) par rapport à chacune des quantités a, b, c,... en considérant x, y, z,...u, v, w,... comme des fonctions de a, b, c,...t, on en tirera

$$(11)\quad 1=\frac{dA}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{dA}{dy}\frac{dy}{da}+\ldots+\frac{dA}{du}\frac{du}{da}+\ldots,\quad 0=\frac{dA}{dx}\frac{dx}{db}+\ldots,\quad 0=\frac{dA}{dx}\frac{dx}{dc}+\ldots,$$
etc.

Cela posé, si l'on combine par voie d'addition les formules (9) et (10), après avoir multiplié respectivement les formules (9) par $-\frac{du}{da}$, $-\frac{dv}{da}$, $-\frac{dw}{da}$,... et les formules (10) par $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$,..., on trouvera, en ayant égard à la première des équations (11),

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} (A, A)[a, a] + (A, B)[a, b] + (A, C)[a, c] + \ldots = 1; \\ \text{on aura de même,} \\ (A, A)[b, a] + (A, B)[b, b] + (A, C)[b, c] + \ldots = 0, \\ (A, A)[c, a] + (A, B)[c, b] + (A, C)[c, c] + \ldots = 0, \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right.$$

Les équations (12) suffisent pour déterminer les valeurs des quantités (A, B), (A, C), etc..., quand on connaît celles des quantités constantes $[a, b]$, $[a, c]$,..,$[b, c]$. Des équations semblables détermineront les valeurs de (B, A), (B, C),... etc... Donc les quantités (A, B), (A, C),...(B, C), etc... sont elles-mêmes constantes, et ne dépendent pas de la variable t.

Il est bon d'observer que, si, dans les équations (6) différentiées par rapport à t, on substitue les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,... $\frac{du}{dt}$,... tirées des équations (1), les formules ainsi obtenues, savoir,

$$(13)\quad 0=\frac{dA}{dx}\frac{dQ}{du}+\frac{dA}{dy}\frac{dQ}{dv}+\ldots-\frac{dA}{du}\frac{dQ}{dx}-\ldots,\quad 0=\frac{dB}{dx}\frac{dQ}{du}+\ldots-\frac{dB}{du}\frac{dQ}{dx}-\ldots,$$

auront pour seconds membres des fonctions identiquement nulles de $x, y, z, u, v, w, \ldots t$. Car, s'il en était autrement, il existerait entre les valeurs générales de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$, et par conséquent aussi entre les valeurs initiales de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ correspondantes à $t = 0$, des équations qui ne renfermeraient aucune constante arbitraire; ce qui est absurde, puisque ces valeurs initiales peuvent être choisies arbitrairement.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'intégrer non plus les équations (1), mais les suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dQ}{du} + \dfrac{dR}{du}, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dQ}{dv} + \dfrac{dR}{dv}, \quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dQ}{dw} + \dfrac{dR}{dw}, \text{ etc...}, \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dQ}{dx} - \dfrac{dR}{dx}, \quad \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{dQ}{dy} - \dfrac{dR}{dy}, \quad \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{dQ}{dz} - \dfrac{dR}{dz}, \text{ etc...}, \end{cases}$$

on pourra supposer encore les valeurs de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ déterminées par les équations (6), pourvu que l'on y considère $a, b, c, \ldots$ comme devenant fonctions de t. Alors, si, dans la première des équations (6), différentiée par rapport à t, on substitue les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots \frac{du}{dt}, \ldots$ tirées des équations (14), si d'ailleurs on a égard à la première des formules (13), qui subsiste, quelles que soient les valeurs de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$, on trouvera

$$(15)\qquad \frac{da}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dR}{du} + \frac{dA}{dy}\frac{dR}{dv} + \ldots - \frac{dA}{du}\frac{dR}{dx} - \ldots,$$

Enfin, si, après avoir exprimé R en fonction de $a, b, c, \ldots t$, on y substitue, au lieu de $a, b, c, \ldots$ les fonctions de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$ représentées par A, B, C,..., on retrouvera identiquement la première valeur de R; et l'on aura, par suite,

$$(16)\quad \frac{dR}{dx} = \frac{dR}{da}\frac{dA}{dx} + \frac{dR}{db}\frac{dB}{dx} + \ldots, \quad \frac{dR}{dy} = \frac{dR}{da}\frac{dA}{dy} + \frac{dR}{db}\frac{dB}{dy} + \ldots, \text{ etc...},$$
$$\frac{dR}{du} = \frac{dR}{da}\frac{dA}{du} + \ldots, \text{ etc.}$$

Cela posé, la formule (15) donnera

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})\dfrac{d\mathrm{R}}{db} + (\mathrm{A}, \mathrm{C})\dfrac{d\mathrm{R}}{dc} + \ldots; \text{ on trouvera de même} \\ \dfrac{db}{dt} = (\mathrm{B}, \mathrm{A})\dfrac{d\mathrm{R}}{da} + (\mathrm{B}, \mathrm{C})\dfrac{d\mathrm{R}}{dc} + \ldots, \\ \quad \text{etc}\ldots \end{cases}$$

Telles sont les équations différentielles qui devront servir à déterminer a, b, c,... en fonction de t. Les coefficients de...... $\frac{d\mathrm{R}}{da}$, $\frac{d\mathrm{R}}{db}$, etc.,..... dans ces équations, seront, d'après les remarques précédemment faites, des fonctions des seules quantités a, b, c,...; et la variable t n'y entrera pas d'une manière explicite.

Application à la Mécanique céleste.

2. Soient $\mathfrak{M}$ la masse du Soleil, m, m', m''... les masses des planètes: prenons pour origine des coordonnées le centre du Soleil, et soient

$$x,\ y,\ z,\quad x',\ y',\ z',\ \ldots$$

les coordonnées des planètes dans leurs mouvements relatifs autour de cet astre. En choisissant convenablement l'unité de masse, désignant par u, v, w les vitesses de m mesurées parallèlement aux axes des x, y, z, et faisant pour abréger

$$\mathrm{M} = \mathfrak{M} + m,$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},\quad r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}},\ \text{etc.},$$

$$v' = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{R} = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + \ldots - \frac{m'}{v'} - \ldots,$$

on trouvera pour les équations différentielles du mouvement de m,

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{My}{r^3} - \frac{dR}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{Mz}{r^3} - \frac{dR}{dz}.$$

Pour déduire ces dernières formules des équations (14) du numéro précédent, il suffira de prendre

$$Q = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{M}{r}$$

et d'admettre que R est fonction seulement de $x, y, z, x', y', z', \ldots$ Ainsi la théorie générale exposée ci-dessus s'applique sans difficulté aux équations différentielles du mouvement des planètes.