JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

É. MONDÉSIR

Solution d'une question qui se présente dans le calcul des probabilités

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 3-10.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__3_0>

SOLUTION

D'une question qui se présente dans le calcul des probabilités;

Par M. É. MONDÉSIR,
Élève ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

Si une urne contient b boules blanches et n boules noires, et qu'on en tire p au hasard, la probabilité de tirer parmi les boules restantes soit q blanches, soit q noires, n'est point altérée et reste la même qu'avant la soustraction des p boules.

Il y aura trois cas à examiner, suivant que p sera à la fois plus petit que b et que n, ou compris entre les deux, ou plus grand en même temps que b et que n.

1[er] cas: $p < b,\ p < n.$

Il y aura dans ce cas $(p+1)$ hypothèses à faire sur la composition des p boules, savoir :

1[re] hyp. .... p blanches,
2[e] hyp. $(p-1)$ bl., 1 noire,
. . . .
$(p+1)$[me] hyp. .... p noires.

Dans chacune de ces hypothèses, la probabilité pour amener q blanches, par exemple, parmi les $(b+n-p)$ boules restantes serait,

$$(1)\left\{\begin{array}{ll}
\text{Dans la 1}^{\text{re}}\text{ hypothèse} & \dfrac{(b-p)(b-p-1)\ldots[b-p-(q-1)]}{(b+n-p)(b+n-p-1)\ldots[b+n-p-(q-1)]}, \\
\text{Dans la 2}^{\text{e}}\text{ hypothèse} & \dfrac{(b-p+1)(b-p+1-1)\ldots[b-p+1-(q-1)]}{(b+n-p)(b+n-p-1)\ldots[b+n-p-(q-1)]}, \\
\ldots & \ldots \\
\text{Dans la }(p+1)^{\text{me}}\text{ hyp.} & \dfrac{b(b-1)\ldots\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)(b+n-p-1)\ldots[b+n-p-(q-1)]}.
\end{array}\right.$$

Cherchons maintenant la probabilité de chaque hypothèse. Soit N le nombre d'arrangements possibles avec $(b+n)$ lettres, en les prenant p à p: ce nombre sera

$$N = (b+n)(b+n-1) \ldots\ldots [b+n-(p-1)];$$

il exprimera toutes les manières possibles de faire le tirage des p boules, en supposant qu'on les tire de l'urne une à une.

Nous aurons d'un autre côté toutes les manières possibles de faire le tirage de p blanches, en prenant le nombre d'arrangements de b lettres p à p. Nommons ce nombre A_0 : il sera

$$A_0 = b(b-1)(b-2) \ldots\ldots [b-(p-1)].$$

Nous aurons A_1, ou le nombre de manières possibles de tirer $(p-1)$ blanches et 1 noire, en observant que l'on peut former ce nombre en prenant chacun des arrangements de b boules $(p-1)$ à $(p-1)$, y ajoutant chacune des n boules noires, et permutant cette boule aux p places qu'elle peut occuper dans chacun des arrangements : nous aurons donc

$$A_1 = b(b-1) \ldots\ldots [b-(p-2)]p.n.$$

Pour obtenir A_2, prenons chaque arrangement de b lettres $(p-2)$ à $(p-2)$; ajoutons-y chaque *combinaison* de n lettres 2 à 2 : la permutation de la première lettre aux $(p-1)$ places de l'arrangement de $(p-2)$ lettres donnera lieu à $(p-1)$ arrangements nouveaux de $(p-1)$ lettres, et la permutation de la 2me lettre transformera chaque arrangement de $(p-1)$ lettres en p arrangements de p lettres. On a évidemment de cette manière tous les arrangements possibles de $(b-2)$ boules blanches et de 2 boules noires : écrivons donc

$$A_2 = b(b-1) \ldots [b-(p-3)]\,p(p-1)\,\frac{n(n-1)}{1.2},$$

nous aurons de même

$$A_3 = b(b-1)\ldots[b-(p-4)]\,p(p-1)(p-2)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

. . . .

$$A_{p-2} = b(b-1)\,p(p-1)\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-3)]}{1.2},$$

$$A_{p-1} = bp\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-2)]}{1},$$

$$A_p = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)].$$

A_0 exprimant le nombre de manières possibles de tirer p blanches, et N le nombre de manières possibles de tirer p boules quelconques, A_0 étant, en d'autres termes, le nombre de coups favorables à la première hypothèse, et N le nombre de coups possibles, $\frac{A_0}{N}$ doit exprimer la probabilité de la première hypothèse: de même les probabilités des hypothèses suivantes seront exprimées par les fractions

$$\frac{A_1}{N}, \frac{A_2}{N}, \ldots \frac{A_{p-1}}{N}, \frac{A_p}{N}.$$

Si nous multiplions la probabilité de chaque hypothèse par la probabilité correspondante (1), et si nous faisons la somme, nous aurons pour la probabilité de tirer q blanches parmi les $(b+n-p)$ boules restantes, la série suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\Big\{ & A_0 \frac{(b-p)(b-p-1)\ldots[b-p-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]} + A_1 \frac{(b-p+1)(b+p+1-1)\ldots[b-p+1-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]} \\ & + A_2 \frac{(b-p+2)(b-p+2-1)\ldots[b-p+2-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]} + \ldots \\ & + A_p \frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\Big\}.\end{aligned}$$

Remplaçons dans cette série $A_0, A_1, \ldots A_p$, par leurs valeurs, ainsi que N et remarquons que le facteur suivant $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)(b+n-1)\ldots[b+n-(q-1)]}$ est commun à tous les termes; la probabilité cherchée sera

$$\begin{aligned}&\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)(b+n-1)\ldots[b+n-(q-1)]}\Big\{\frac{(b-q)\ldots[b-p-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]} \\ &+ \frac{(b-q)\ldots[b-p+1-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}pn \\ &+ \frac{(b-q)\ldots[b-p+2-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}p(p-1)\frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots\ldots \\ &+ \frac{(b-q)(b-q-1)}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}p(p-1)\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-3)]}{1.2.} \\ &+ \frac{b-q}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-2)]}{1} \\ &+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(p-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\Big\}.\end{aligned}$$

Examinons la signification et la valeur de la quantité contenue entre les crochets : tous les termes de la série ont un dénominateur commun $(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)=(b+n-q)(b+n-q-1)\ldots$ $[b+n-q-(p-1)]$: ce dénominateur est le nombre d'arrangements possibles avec $(b+n-q)$ lettres prises p à p ; il ne diffère du dénominateur N que par le changement de $(b+n)$ en $(b+n-q)$; il doit donc exprimer le nombre de coups possibles, quand on tire p boules d'une urne qui en contient $(b+n-q)$.

Considérons chaque expression de la série, à part ce dénominateur commun, par exemple l'expression

$$(b-q)\ldots[b-p+2-(q-1)]\,p(p-1)\frac{n(n-1)}{1.2},$$

on peut l'écrire ainsi

$$(b-q)(b-q-1)\ldots[b-q-(p-3)]\,p(p-1)\frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Comparée à l'expression A_2, on voit que cette formule n'en diffère que par le changement de b en $(b-q)$; elle doit exprimer toutes les manières possibles de tirer $(p-2)$ boules blanches et 2 noires d'une urne qui contient $(b-q)$ boules blanches et n noires. On verrait de même que les autres expressions contenues entre les crochets ne diffèrent des autres expressions A_0, A_1, etc., que par le même changement de b en $(b-q)$. La somme de ces expressions, sauf leur dénominateur commun, indique donc toutes les manières possibles de tirer p boules d'une urne qui contient $(b-q)$ blanches et n noires, comme la somme des expressions A_0, etc., indique toutes les manières possibles de tirer p boules d'une urne qui contient b blanches et n noires. Cette somme d'expressions est donc égale à son dénominateur commun, et la série entière comprise entre les crochets égale à l'unité, ce qui réduit la probabilité cherchée à

$$\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)(b+n-1)\ldots[b+n-(q-1)]},$$

c'est-à-dire à ce qu'elle était avant le tirage de p boules.

2^{me} cas. $p > b$ et $< n$.

Dans ce cas, au lieu des $(p+1)$ hypothèses du cas précédent, nous n'en aurons que $(b+1)$: les probabilités de ces hypothèses formées comme précédemment seront

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\,\mathrm{A}_0 = \left\{b(b-1\ldots 3.2.1(b+1)(b+2)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b-1)]}{1.2.3\ldots(p-b)}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}},$$

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\,\mathrm{A}_1 = \left\{b(b-1)\ldots 3.2b(b+1)\ldots .p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b)]}{1.2.3\ldots(p-b+1)}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}},$$

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\,\mathrm{A}_2 = \left\{b(b-1)\ldots 3(b-1)\,b\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+1)}{1.2.3\ldots(p-b+2)}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}};$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\,\mathrm{A}_{b-1} = \left\{bp\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-2)]}{1}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}};$$

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\;\mathrm{A}\; = \{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]\}\;\frac{1}{\mathrm{N}};$$

dans ces diverses hypothèses, les probabilités de tirer q blanches sont

$$\begin{aligned}
&1^{\text{re}}\ \text{hyp}\ldots\ 0,\\
&2^{\text{e}}\ \text{hyp}\ldots\ 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(q+1)^{\text{me}}\ \text{hyp}\ldots\ \frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(b+1)^{\text{me}}\ \text{hyp}\ldots\ \frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}.
\end{aligned}$$

En multipliant respectivement ces hypothèses l'une par l'autre, et faisant la somme, nous aurons pour la probabilité cherchée

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{N}}\Big\{&\mathrm{A}_q\,\frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+\mathrm{A}_{q+1}\,\frac{(q+1)\,q\ldots 2}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\\
&+\mathrm{A}_{q+2}\,\frac{(q+2)(q+1)\ldots 3}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+\ldots+\mathrm{A}_b\,\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\Big\},
\end{aligned}$$

Or remarquons qu'on peut mettre en facteur commun........ $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}$, chaque terme contenant en numérateur le produit de la suite des nombres depuis b jusqu'à 1, ou jusqu'à 2, etc., et au moins jusqu'à $[b-(q-1)]$, et en dénominateur la suite $(b+n)\ldots[b+n-(p-1)]\,(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]$: écrivons donc pour la probabilité demandée

$$\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\left\{\left[\frac{(b-q)\ldots 3.2.1}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q+1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q)}\right.\right.$$
$$+\left[\frac{(b-q)\ldots 3.2}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+1)}\right.$$
$$+\quad\frac{(b-q)\ldots 3}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q-1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q+1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.+\quad\frac{1}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]\right\}.$$

La série comprise entre les crochets se compose de $(b-q+1)$ termes correspondants aux $(b-q+1)$ hypothèses possibles sur la composition de p boules tirées d'une urne qui contiendrait $(b-q)$ blanches et n noires, et en employant ainsi le raisonnement appliqué déjà dans le cas précédent, on voit aisément que cette série doit se réduire à 1, puisque d'un côté le dénominateur commun...... $(b+n-q)\ldots[b+n-q-(p-1)]$ exprime toutes les manières possibles de tirer p boules d'une urne qui en contient $(b+n-q)$, que de l'autre la somme des numérateurs exprime exactement la même chose. La probabilité cherchée est donc, comme dans le 1[er] cas, la même qu'avant le tirage de p boules.

3[me] cas. $p > b$ et $> n$.

Le nombre d'hypothèses possibles sur la composition des p boules sera alors égal à un certain nombre $(k+1)=(b+n-p+1)$: nous obtiendrons toujours la probabilité des diverses hypothèses comme précédemment, et nous aurons pour les valeurs de ces probabilités

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\,\mathrm{A}_0=\left\{b(b-1)\ldots 3.2.1\,(b+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b-1)]}{1.2.3\ldots(p-b)}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}},$$
$$\frac{1}{\mathrm{N}}\,\mathrm{A}_1=\left\{b(b-1)\ldots 3.2\,b(b+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b)]}{1.2.3\ldots(p-b+1)}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}},$$

$$\frac{1}{N}A_2 = \left\{b(b-1)\ldots 3(b-1)b\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+1)]}{1.2.3\ldots(p-b+2)}\right\}\frac{1}{N},$$

. . . .

$$\frac{1}{N}A_{k-2} = \left\{b(b-1)\ldots(k-1)(b-k+3)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-3)]}{1.2.3\ldots(p-b+k-2)}\right\}\frac{1}{N},$$

$$\frac{1}{N}A_{k-1} = \left\{b(b-1)\ldots k(b-k+2)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-2)]}{1.2.3\ldots(p-b+k-1)}\right\}\frac{1}{N},$$

$$\frac{1}{N}A_k = \left\{b(b-1)\ldots(k+1)(b-k+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+k)}\right\}\frac{1}{N}:$$

dans ces diverses hypothèses, les probabilités de tirer q blanches sont

1re hyp.... o,
2e hyp.... o,
. . . . .

$$(q+1)^{\text{ième}}\,\text{hyp.}\ \frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]};$$

. . . .

$$(k+1)^{\text{ième}}\,\text{hyp.}\ \frac{k(k-1)\ldots[k-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}.$$

Nous aurons donc pour la probabilité cherchée

$$\frac{1}{N}\left\{A_q\frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+A_{q+1}\frac{(q+1)q\ldots 3.2}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots+A_k\frac{k(k-1)\ldots[k-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\right\}$$
$$=\frac{b(b-1)\ldots q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n)\ldots(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q)}$$
$$+\frac{b(b-1)\ldots(q+1)q\ldots 3.2}{(b+n)\ldots(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+1)}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{b(b-1)\ldots(k+1)k\ldots[k-(q-1)]}{(b+n)\ldots(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-k+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+k)}.$$

Le facteur $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}$ est évidemment commun à tous les termes de la série, car $[k-(q-1)]=b+n-p-(q-1)$ $=[b-(q-1)]-(p-n)$, est plus petit que $b-(q-1)$; on peut donc mettre ce facteur en évidence, et écrire la série ainsi qu'il suit

$$\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}\left\{\frac{(b-q)\ldots3.2.1}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q+1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q)}\right.$$
$$+\frac{(b-q)\ldots3.2}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+1)}$$
$$+\frac{(b-q)\ldots3}{(b+n-q)\ldots(b+n-p-(q-1))]}(b-q-1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q+1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.+\frac{(b-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-k+1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+k)}\right\}.$$

La série comprise entre les crochets se compose évidemment de $[b+n-p-(q-1)]$ termes ou de $(k-q+1)$ termes, chacun des termes exprime la probabilité d'une des $(b+n-q-p+1)$ hypothèses que l'on peut faire sur la composition de p boules, que l'on tire d'une urne qui en contient $(b+n-q)$, dans le cas où p est à la fois plus grand que $(b-q)$ et que n; or, comme la somme des probabilités de toutes les hypothèses possibles, doit être égale à 1, il s'ensuit que la probabilité cherchée est réduite au premier facteur $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}$ comme dans les deux cas précédents.

Le théorème que nous venons de démontrer est encore vrai pour une urne qui renfermerait des boules de plusieurs couleurs : on le démontrerait en séparant les boules en deux groupes, dont l'un renfermerait les boules d'une même couleur, et l'on prouverait que la probabilité de tirer une boule de cette couleur n'est point changée: on ferait de même pour les autres couleurs. Ce théorème peut donc être énoncé ainsi dans toute sa généralité : Si une urne renferme des boules de plusieurs couleurs, et qu'on en tire au hasard un certain nombre, la probabilité d'amener, parmi les boules restantes, q boules d'une couleur quelconque, n'est point changée par cette soustraction et reste la même qu'auparavant. Il est tout-à-fait semblable à celui dont M. Poisson s'est servi dans son mémoire *sur l'avantage du banquier au jeu de trente et quarante* (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XIII, p. 177-178), et on le regardera peut-être comme évident *à priori*, mais il était bon d'en vérifier analytiquement l'exactitude.