JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Mémoire sur diverses manières de généraliser les propriétés des diamètres conjugués dans les sections coniques. - Nouveaux théorèmes de Perspective, pour la transformation des relations métriques des figures. - Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la Perspective. Manière de démontrer dans le cône oblique les propriétés des foyers des sections coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 388-405.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__388_0>

MÉMOIRE

Sur diverses manières de généraliser les propriétés des diamètres conjugués dans les sections coniques. — Nouveaux théorèmes de Perspective, pour la transformation des relations métriques des figures. — Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la Perspective. — Manière de démontrer dans le cône oblique les propriétés des foyers des sections coniques ;

PAR M. CHASLES.

1. Les propriétés des sections coniques, et celles des surfaces du second degré, relatives aux diamètres conjugués, peuvent être généralisées sous plusieurs points de vue. Pour les surfaces, cette généralisation repose sur quelques principes de Géométrie qu'il nous faudrait exposer préalablement. Mais pour les coniques la question peut être traitée, en grande partie du moins, par les seules ressources de la Géométrie élémentaire. Nous allons donc nous occuper seulement, dans cet écrit, de la généralisation des propriétés des diamètres conjugués des coniques.

2. *Premier mode de généralisation.* Soient sa, sb deux demi-diamètres conjugués d'une conique c, on aura

$$\overline{sa}^2 + \overline{sb}^2 = \text{const.}$$

Concevons un cercle c' concentrique à la conique, et soient sa', sb' ses rayons dirigés suivant les demi-diamètres sa, sb; on aura

$$\frac{\overline{sa}^2}{\overline{sa'}^2} + \frac{\overline{sb}^2}{\overline{sb'}^2} = \text{const.}$$

Projetons, par des droites parallèles entre elles, la conique et le cercle, sur un même plan; on aura deux coniques C, C′ en projection. Soient SA, SB, et SA′, SB′, les demi-diamètres de ces deux courbes, correspondants respectivement aux demi-diamètres des deux premières; on aura

$$\frac{sa}{sa'} = \frac{\text{SA}}{\text{SA}'}, \quad \frac{sb}{sb'} = \frac{\text{SB}}{\text{SB}'},$$

et, conséquemment, l'équation

$$\frac{\overline{\text{SA}}^2}{\overline{\text{SA}'}^2} + \frac{\overline{\text{SB}}^2}{\overline{\text{SB}'}^2} = \text{const.}$$

Or sa et sb étant conjugués par rapport à la conique c, SA et SB sont conjugués par rapport à la conique C, parce que la tangente à la courbe c au point a est parallèle à sb, et que, par conséquent, la tangente à la courbe C, au point A, est parallèle à SB; ce qui est la condition pour que SA et SB soient conjugués. L'équation précédente exprime donc ce théorème :

Étant données deux coniques dans un plan, la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués de la première, divisés respectivement par les carrés des demi-diamètres de la seconde qui leur sont parallèles, est constante.

3. Si la première conique est un cercle, on conclut de ce théorème, le suivant :

La somme des valeurs inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires d'une conique est constante.

4. *Second mode de généralisation.* Que l'on ait une section conique c et plusieurs systèmes de ses diamètres conjugués; qu'on fasse la perspective de cette figure sur un plan; on aura une seconde section conique C, et plusieurs systèmes de deux droites passant toutes par un même point fixe. Tous ces systèmes de deux droites jouiront de propriétés analogues à celles des systèmes de deux diamètres conju-

gués; mais ces propriétés seront plus générales que celles des diamètres conjugués, et celles-ci s'en déduiront, comme cas particuliers, si l'on suppose que le point fixe devienne le centre de la conique C.

Soit I la droite qui correspond dans le plan de la conique C à la droite située à l'infini dans le plan de la conique *c*. Cette droite I est l'intersection du premier plan par un plan parallèle au second, mené par le point de l'œil. Soit *s* le centre de la conique *c*, et S le point correspondant dans la conique C, c'est-à-dire la perspective du point *s*. La propriété caractéristique du point *s*, c'est que, étant menées deux tangentes à la courbe *c*, parallèles entre elles, la droite qui joint les points de contact passe toujours par le point *s*. Pareillement, la propriété caractéristique du point S, c'est que, *étant menées, par un même point quelconque de la droite* I, *deux tangentes à la conique* C, *la droite qui joint les deux points de contact passe toujours par le point* S. Ce qui prouve que *le point* S *est le pôle de la droite* I, pris par rapport à la conique C (*).

La propriété caractéristique de deux diamètres conjugués de la courbe *c*, c'est que les tangentes à la courbe, menées aux extrémités d'un des deux diamètres, sont parallèles à l'autre diamètre. On en conclut que la propriété caractéristique de deux droites correspondantes, dans le plan de la conique C, à deux diamètres conjugués de la conique *c*, c'est que : *les tangentes à la courbe* C, *aux points où l'une des deux droites la rencontre, se croisent au point où l'autre droite rencontre l'axe* I. Ce point est précisément le *pôle* de la première droite. On peut donc dire que *les deux droites sont telles que chacune d'elles passe par le pôle de l'autre;* ce pôle étant pris par rapport à la conique C. Ces deux droites passent par le point fixe S; nous les appellerons *axes conjugués relatifs au point* S.

Ainsi, aux systèmes de deux diamètres conjugués d'une conique, correspondent, en perspective, des systèmes de deux *axes conjugués* d'une nouvelle conique, *relatifs à un point fixe.* Et la propriété ca-

(*) On appelle *pôle* d'une droite, par rapport à une conique, le point par où passent toutes les cordes de contact des angles circonscrits à la conique, qui ont leurs sommets sur la droite.

ractéristique des deux axes de chaque système, c'est que *le pôle de l'un, pris par rapport à la conique, est situé sur l'autre.*

Ce sont ces systèmes de deux *axes conjugués relatifs à un point* dont nous allons chercher les propriétés; elles seront la généralisation de celles des diamètres conjugués.

5. Nous nous servirons pour cela d'un principe général de la perspective, dont on n'a pas encore fait usage, et qui sera d'un très utile secours dans beaucoup d'autres questions. Sa démonstration ne peut offrir de difficulté; et nous nous bornerons ici à son énoncé :

Principe de perspective. *Quand deux figures planes sont la perspective l'une de l'autre, le rapport des distances d'un point quelconque de la première à deux droites fixes de cette figure, est au rapport des distances du point homologue de la seconde figure aux deux droites correspondantes à ces droites fixes, dans une raison constante.*

6. Une droite, dans chacune des deux figures, peut être prise à l'infini; de là résultent deux corollaires du principe, qui nous seront utiles; nous allons tout de suite les énoncer, pour ne plus revenir sur ces propositions préliminaires :

1er Corollaire. *Quand deux figures planes sont la perspective l'une de l'autre, la distance d'un point quelconque de la première, à une droite fixe prise dans le plan de cette figure, est dans une raison constante avec le rapport des distances du point homologue de la seconde figure à deux droites fixes, dont la première correspond à la droite prise dans le plan de la première figure, et la seconde est l'intersection du plan de la seconde figure par le plan mené par l'œil parallèlement au plan de la première figure.*

7. 2e Corollaire. *Quand deux figures planes sont la perspective l'une de l'autre, si l'on mène dans la première la droite correspondante à l'infini de la seconde* (c'est-à-dire la droite qui est l'intersection du plan de la première figure par le plan mené par l'œil parallèlement à celui de la seconde), *et dans le plan de la seconde figure la droite correspondante à l'infini de la première, les distances de deux points homologues quelconques des deux figures à ces deux droites respectivement, auront leur produit constant.*

8. Cela posé, reprenons nos deux coniques c, C, qui sont la pers-

pective l'une de l'autre, et considérons dans le plan de la seconde le point S qui correspond au centre s de la première. La conique C et le point S étant donnés, il y aura une infinité de coniques c, dans l'espace, qui auront pour perspective la courbe C, et dont les centres s correspondront au point S. Parmi cette infinité de courbes qu'on peut concevoir, choisissons-en une qui présente cette circonstance particulière, que deux diamètres quelconques de cette courbe fassent entre eux un angle égal à celui des deux droites qui leur correspondent dans le plan de la courbe C, lesquelles droites seront deux *axes conjugués relatifs au point* S. Cette relation particulière entre la courbe c et sa perspective C, peut s'obtenir facilement. Pour cela, que par la polaire du point S, prise par rapport à la courbe C, on mène un premier plan quelconque; puis un second qui divise en deux, également, l'angle que le premier fera avec le plan de la courbe S; et que par le point S on mène une droite perpendiculaire au second plan; elle rencontrera le premier en un point s qui sera pris pour le lieu de l'œil; un plan quelconque parallèle au premier, fera dans le cône qui aura le point s pour sommet et la courbe C pour base, une section qui sera la courbe c.

9. D'après cela, appliquons aux deux courbes c, C le principe exprimé par le premier corollaire, en regardant la courbe c comme la première figure, et la courbe C comme la seconde.

Menons par les points s, S, dans les plans des deux courbes, respectivement, deux droites correspondantes sq, SQ; soient a, A deux points correspondants quelconques des deux courbes; aq, AQ les perpendiculaires abaissées de ces points sur les deux droites sq, SQ; et AP la perpendiculaire abaissée du second sur la polaire du point S; on aura, d'après l'énoncé du premier corollaire,

$$aq = \lambda \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}},$$

λ étant une constante.

Or aq et AQ étant les perpendiculaires abaissées des deux points a, A sur les droites sq, SQ, on a

$$aq = as \cdot \sin asq,$$
$$\mathrm{AQ} = \mathrm{AS} \cdot \sin \mathrm{ASQ}.$$

La droite sS, qui passe par le sommet du cône, étant, par hypothèse, perpendiculaire au plan qui divise en deux également l'angle des plans des deux courbes c, C, il s'ensuit que l'angle des deux droites sa, sq est égal à l'angle des deux droites SA, SQ; de sorte que les deux équations ci-dessus donnent

$$\frac{aq}{AQ} = \frac{as}{AS}.$$

L'équation précédente devient donc

$$sa = \lambda . \frac{SA}{AP}.$$

Cette équation résout la question que nous nous proposions; car elle sert à appliquer aux *axes* de la conique C, *relatifs au point* S, les propriétés des *diamètres* de la conique c.

Il est important de se rappeler que les angles que font entre eux ces axes, sont égaux aux angles que font entre eux les diamètres correspondants, comme nous l'avons dit ci-dessus des angles asq, ASQ. Cela servira pour transporter diverses propriétés des *diamètres* d'une conique, aux *axes relatifs à un point*.

Appliquons cette méthode.

10. Dans une conique, il existe un système de deux diamètres conjugués rectangulaires, et ces diamètres sont maximum et minimum parmi tous les autres; on en conclut que

Dans une conique, parmi les systèmes de deux axes conjugués SA, SA′ *relatifs à un point* S, *il en existe un où ces axes sont à angle droit; pour ces deux axes les rapports* $\frac{SA}{AP}$, $\frac{SA'}{A'P'}$ *sont, respectivement, un maximum et un minimum.*

11. La somme des valeurs inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires est constante; donc

Pour deux axes SA, SA′ *relatifs à un point, menés à angle droit, la somme des carrés des deux rapports* $\frac{AP}{SA}$, $\frac{A'P'}{SA'}$, *est constante.*

12. La somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante; donc

Pour deux axes conjugués SA, SA′ *relatifs à un point* S, *la somme des carrés des deux rapports* $\frac{SA}{AP}$, $\frac{SA'}{A'P'}$ *est constante.*

13. La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués, sur une droite, est constante; c'est-à-dire que la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués, multipliés respectivement par les carrés des cosinus des angles qu'ils font avec une droite fixe, et constante. On en conclut que, pour deux axes conjugués SA, SA′, les carrés des rapports $\frac{SA}{AP}$, $\frac{SA'}{A'P'}$ multipliés respectivement par les carrés des cosinus des angles que les deux axes SA, SA′ font avec une droite fixe, ont leur somme constante. Ce théorème peut s'exprimer ainsi :

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de deux axes conjugués relatifs à un point, sur une droite menée par ce point, divisés respectivement par les carrés des distances de ces points à la polaire du point fixe, est constante.

14. Que la droite menée par le point fixe, soit parallèle à la polaire de ce point, le théorème prendra cet énoncé :

La somme des carrés de deux axes conjugués relatifs à un point, divisés respectivement par les carrés des segments compris sur ces axes entre leurs extrémités et la polaire du point, est constante.

15. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des quatre extrémités de deux diamètres conjugués sur une droite fixe menée arbitrairement, est constante; on conclut de là, par le principe exprimé dans le premier corollaire, que

Dans une conique, deux axes conjugués relatifs à un point rencontrent la courbe en quatre points qui sont tels que la somme des carrés de leurs distances à une droite fixe menée arbitrairement, divisés respectivement par les carrés des distances de ces points à la polaire du point fixe, est constante.

16. Si la droite fixe est prise à l'infini, on fera usage du second corollaire, et l'on aura ce théorème :

Dans une conique, deux axes conjugués quelconques relatifs à un point fixe rencontrent la courbe en quatre points qui jouissent de cette *propriété, que la somme des valeurs inverses des carrés de leurs distances à la polaire du point fixe, est constante.*

17. On voit par ce qui précède, comment les propriétés des diamètres conjugués donnent lieu à des propriétés des systèmes de deux *axes conjugués relatifs à un point*, qui sont la généralisation des premières.

Manière de démontrer les propriétés des foyers dans les sections coniques.

18. La position que nous avons supposée aux deux courbes c, C dans l'espace (8), conduit naturellement à la découverte des *foyers* des coniques, et se prête aussi à la démonstration de leurs propriétés. Car si l'on suppose que la courbe c soit un cercle, on aura $sa =$ le rayon, et par conséquent, $\frac{SA}{AP} =$ constante; ce qui est une des propriétés caractéristiques des *foyers*.

Ainsi l'on est conduit naturellement à la considération de ces points qui jouent un si grand rôle dans la théorie des coniques. Les Anciens, bien qu'ils aient formé et étudié les coniques dans le cône, ou, comme ils disaient, *dans le solide*, n'ont traité des foyers que par des considérations de Géométrie plane, sans dire par quelle voie ils ont été conduits à la découverte de ces points. Les Modernes, en voulant rechercher l'origine de ces points dans le cône même, n'ont pris que le cône droit, ou de révolution; et l'on n'avait pas encore indiqué le moyen de découvrir ces points dans le cône oblique, ni d'y démontrer leurs propriétés.

19. Les considérations précédentes se prêtent avec une grande facilité à la démonstration de toutes les propriétés des foyers, en les déduisant de celles du cercle. Nous donnerons ici un seul exemple de cette méthode.

Qu'autour d'un point fixe o, pris dans le plan d'un cercle, on fasse tourner une transversale qui rencontre la circonférence en deux points a, a'; soient aq, $a'q'$, oq'' les perpendiculaires abaissées des trois points a, a', o sur la polaire du point fixe, on démontre facilement que l'on a la relation

$$\frac{1}{aq} \pm \frac{1}{a'q'} = \frac{2}{oq''};$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{aq} \pm \frac{1}{a'q'} = \text{const.},$$

quelle que soit la transversale menée par le point o.

On doit prendre le signe + quand ce point est dans l'intérieur du cercle, et le signe — quand il est au dehors.

Dans la conique C, qui est la perspective du cercle, à la transversale oaa' corespondra une transversale OAA' menée par un point fixe O; au centre du cercle correspondra le foyer de la conique; à la droite située à l'infini dans le plan du cercle, correspondra la *directrice* relative à ce foyer. Soient AP, A'P' les perpendiculaires abaissées des points A, A' sur cette directrice et AQ, A'Q' les perpendiculaires abaissées des mêmes points sur la polaire du point O; on aura, d'après le premier corollaire,

$$aq = \lambda \frac{AQ}{AP}, \quad a'q' = \lambda \frac{A'Q'}{A'P'}.$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$\frac{AP}{AQ} \pm \frac{A'P'}{A'Q'} = \text{const.}$$

Elle exprime cette propriété générale des coniques :

Si autour d'un point fixe, pris dans le plan d'une conique, on fait tourner une transversale qui rencontre la courbe en deux points, la somme ou la différence des distances de ces deux points à la directrice de la conique, divisées respectivement par leurs distances à la polaire du point fixe, sera constante.

Ce sera la *somme* si le point fixe est pris dans l'intérieur de la courbe, et la *différence* s'il est pris au dehors.

20. Maintenant, en observant que la distance d'un point de la courbe à la directrice est proportionnelle à la distance de ce point au foyer, on donnera au théorème cet autre énoncé :

Si autour d'un point fixe pris dans le plan d'une conique, on fait tourner une transversale qui la rencontre en deux points; la somme ou *la différence des distances de ces deux points au foyer de la courbe, divisées respectivement par leurs distances à la polaire du point fixe, sera constante.*

Ce sera la *somme* si le point fixe est pris dans l'intérieur de la courbe, et la *différence* s'il est pris au dehors.

21. Si le point fixe est le centre de la courbe, sa polaire est à l'infini, et le théorème devient la propriété connue du foyer, savoir, que

La somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un foyer d'une conique aux extrémités d'un diamètre est constante.

C'est la *somme* dans l'ellipse, et la *différence* dans l'hyperbole.

22. Nous nous bornerons ici à ce seul exemple, qui suffit pour faire voir comment on démontrera dans le cône oblique les propriétés des foyers des sections coniques. On obtiendra de cette manière un assez grand nombre de propriétés nouvelles, que j'aurai occasion de démontrer ailleurs.

Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la perspective.

23. Les principes et les considérations de perspective dont nous nous sommes servi peuvent se transformer aisément en considérations de Géométrie plane, et conduire à une autre méthode, différente dans la forme, quoique la même au fond, pour étudier les propriétés des sections coniques.

Reprenons les deux courbes c, C dans l'espace. Puisque deux droites quelconques sa, sb, menées par le point s, dans le plan de la première, font entre elles un angle égal à celui des deux droites correspondantes SA, SB dans le plan de la seconde courbe, on voit que si sur celles-ci on prend des lignes SA′, SB′,... égales aux lignes sa', sb',..., leurs extrémités seront sur une conique C′ ayant son centre en S, et qui sera égale à la courbe c. Ainsi l'on aura entre cette conique C′ et la conique C la relation

$$\mathrm{SA'} = \lambda . \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AP}}.$$

On conclut de là ce théorème de Géométrie plane :

Étant pris un point fixe S *dans le plan d'une conique, si de ce point on mène une droite à chaque point* A *de la courbe, et que,* AP *étant la distance de ce point à la polaire du point fixe, on prenne sur* SA *un segment* SA′ *proportionnel à* $\frac{SA}{AP}$, *le point* A′ *sera sur une section conique* C′ *qui aura son centre au point fixe.*

Si le point fixe est un foyer de la conique proposée, la nouvelle courbe sera un cercle.

24. La conique C′ peut être regardée comme la projection de la courbe c sur le plan de la courbe C, cette projection étant faite par des droites parallèles entre elles, et perpendiculaires au plan qui divise en deux également l'angle des plans des deux courbes c, C. Et quelle que soit la figure tracée dans le plan de la courbe c, cette projection produira une figure parfaitement égale, dans le plan de C. Il suit de là que toutes les relations *descriptives* et *métriques* entre la courbe c et la courbe C auront lieu entre les deux courbes C′ et C situées dans un même plan.

25. Les relations descriptives font voir que les deux courbes C′ et C sont *homologiques*, suivant l'expression de M. Poncelet, c'est-à-dire que *les points correspondants des deux figures concourent en un même point fixe* (appelé *centre d'homologie*) qui est le point S ; *et les droites correspondantes concourent en des points situés tous sur une même droite* (appelée *axe d'homologie*), qui est ici la droite d'intersection des plans des deux courbes.

26. Mais, outre ces relations descriptives, il résulte encore de ce qui précède diverses relations métriques entre deux figures homologiques, qui n'ont point encore été données et qui doivent jouer un rôle important dans cette théorie et dans ses nombreuses applications. Nous nous bornerons, dans ce moment, à cette simple observation, parce que nous avons traité ailleurs de cette théorie avec tous les développements dont elle nous a paru susceptible, dans un travail où elle se présente comme cas particulier d'une méthode plus générale pour la transformation des figures, méthode propre à la *généralisation* et à la *démonstration* des vérités géométriques. Cette méthode s'applique aux figures à trois dimensions, et nous servira par conséquent à donner aux propriétés des diamètres des surfaces du second degré la même gé-

néralisation que nous venons de donner aux propriétés des diamètres des sections coniques. Nous avons voulu simplement montrer, dans le présent article, qu'avec le seul secours de la Géométrie la plus élémentaire, on pouvait, sans considérations bien savantes ni théories nouvelles, parvenir à la même généralisation, du moins pour les coniques.

Nous avons fait usage, pour cela, des seuls principes de la perspective, méthode facile, avec laquelle on est familiarisé, mais dont on n'a pas encore tiré, je crois, tous les avantages qu'elle peut procurer, parce qu'on n'y a considéré, généralement, que les relations *descriptives* des figures, et nullement les relations *métriques*. Celles-ci cependant sont plus importantes, plus utiles et plus fécondes, et conduisent à des résultats plus complets. J'aurai occasion de développer ailleurs cette idée, et d'en faire l'application à plusieurs résultats des travaux de Monge et de Carnot, que je regarde comme l'origine et le fondement des progrès que la Géométrie a faits depuis une trentaine d'années.

27. *Troisième mode de généralisation.* Ce troisième genre de généralisation consiste à substituer aux systèmes de deux demi-diamètres conjugués d'une conique, des systèmes d'un plus grand nombre de demi-diamètres, déterminés suivant des conditions communes, telles que les propriétés connues des systèmes de deux diamètres conjugués appartiennent aussi à ces systèmes d'un plus grand nombre de demi-diamètres.

En partant de cette idée de généralisation, nous sommes parvenu à l'expression commune des systèmes d'un nombre quelconque de demi-diamètres d'une conique, jouissant de toutes les propriétés des systèmes de deux demi-diamètres conjugués; ces propriétés mêmes pouvant être énoncées dans une plus grande généralité. Cette matière, pour être exposée complétement, exigerait un article assez étendu; nous y reviendrons ailleurs: nous allons simplement considérer ici les systèmes de trois demi-diamètres, parce que nous pouvons traiter ce cas par une méthode particulière, qui n'exige aucunes considérations préalables.

Nous supposerons que la conique soit une ellipse; et, au lieu de considérer trois demi-diamètres de cette courbe, nous considérerons les trois points qui sont les extrémités de ces demi-diamètres. Cela est absolument la même chose; mais nous pourrons par là énoncer un plus grand nombre de théorèmes. Ainsi nous allons considérer plusieurs systèmes de trois points pris d'une certaine manière sur une ellipse.

28. Concevons une sphère, et trois de ses rayons rectangulaires: par leurs extrémités, menons un plan qui coupera la sphère suivant un cercle; concevons le diamètre qui passe par le pôle de ce cercle; si autour de ce diamètre on fait tourner le système des trois demi-rayons rectangulaires, il est évident que leurs extrémités se mouvront sur le cercle, ce qui prouve qu'il y aura une infinité de systèmes de trois rayons rectangulaires qui s'appuieront sur le cercle passant par les extrémités des trois premiers rayons.

Maintenant supposons que la sphère étant rapportée à trois axes coordonnés, à chacun de ses points ayant pour coordonnées x, y, z, corresponde dans l'espace un point qui ait pour coordonnées, suivant les mêmes axes respectivement, ces trois premières multipliées par trois constantes, c'est-à-dire λx, μy, νz. Ce nouveau point appartiendra à un ellipsoïde; et l'on reconnaît aisément que, à trois rayons rectangulaires de la sphère correspondront trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde; et qu'à une section plane de la sphère correspondra une section plane de l'ellipsoïde.

Il résulte de là, que

Le plan mené par les extrémités de trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde coupe cette surface suivant une ellipse E, *sur laquelle on peut prendre une infinité d'autres systèmes de trois points qui seront aussi les extrémités de trois demi-diamètres conjugués.*

29. Ce sont là les systèmes de trois points que nous allons considérer; mais il nous faut caractériser et définir les trois points par quelque propriété prise dans la nature seule de la courbe E, sans être obligé de faire usage d'une surface du second degré. Pour cela, soient A, B, C les trois points, considérés comme les extrémités de trois demi-diamètres OA, OB, OC d'un ellipsoïde; concevons le plan tangent à cette surface au point A; il sera parallèle au plan des deux demi-diamètres OB, OC : la trace de ce plan tangent sur celui de la conique E, c'est-à-dire la tangente à cette courbe, sera donc parallèle à la corde BC. Il

suit de là que le diamètre de la courbe qui aboutit au point A passe par le milieu de la corde BC. Pareillement les droites menées du centre de la courbe aux points B, C passent, respectivement, par les milieux des cordes AC, AB. On en conclut que *le centre de la courbe est le centre des moyennes distances des trois points* A, B, C.

Réciproquement, *trois points pris sur la conique, de manière que leur centre des moyennes distances soit le centre de la courbe, sont les extrémités de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.* Car l'un de ces trois points étant pris arbitrairement, les deux autres sont parfaitement déterminés. Le point A, par exemple, étant donné, pour déterminer les deux autres points B, C, on mènera par le centre O' de la conique E le demi-diamètre O'A qu'on prolongera d'une quantité O'*a* égale à la moitié de O'A, et par le point *a* on mènera une parallèle à la tangente à la courbe au point A; les intersections de la courbe par cette parallèle seront les points B, C.

Ainsi les systèmes de trois points pris sur la conique sont définis par la condition que *le centre des moyennes distances des trois points de chaque système est le centre de figure de la courbe.* Nous appellerons ces trois points, pour abréger, points *conjugués.*

Passons à la démonstration des propriétés des systèmes de trois points *conjugués*. Il nous suffira, le plus souvent, de rappeler une propriété de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, pour en conclure immédiatement la propriété correspondante du système de trois points *conjugués.*

30. Le tétraèdre formé par trois demi-diamètres conjugués est constant; donc *l'aire du triangle formé par trois points conjugués est constante.*

31. Quand on a deux systèmes de demi-diamètres conjugués, le tétraèdre construit sur un demi-diamètre du premier système et deux demi-diamètres du second, a le même volume que le tétraèdre construit sur les trois autres demi-diamètres; donc

Étant pris deux systèmes de trois points conjugués, l'aire du triangle formé par un point du premier système et deux points du second, est égale à l'aire du triangle formé par les trois autres points.

32. La somme des carrés de trois diamètres conjugués de l'ellip-

soïde est constante ; or ici le centre de l'ellipsoïde est indéterminé ; on peut donc dire que :

La somme des carrés des rayons menés d'un point fixe de l'espace à trois points conjugués est constante.

Notre démonstration ne s'applique ici qu'à un point pris au dehors du plan de la courbe, puisqu'un point pris dans son plan ne peut pas être le centre d'un ellipsoïde ayant pour diamètres conjugués les droites menées de ce point aux trois points conjugués. Mais du cas général d'un point pris dans l'espace on conclut la démonstration pour le cas d'un point pris dans le plan de la courbe. Car soient A, B, C les trois points conjugués, et O un point de l'espace, on aura

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \text{constante.}$$

Soit O' la projection du point O sur le plan de la courbe, on aura

$$\overline{OA}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''A}^2, \quad \overline{OB}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''B}^2, \quad \overline{OC}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{O''C}^2.$$

Donc

$$3\overline{OO''}^2 + \overline{O''A}^2 + \overline{O''B}^2 + \overline{O''C}^2 = \text{constante};$$

d'où

$$\overline{O''A}^2 + \overline{O''B}^2 + \overline{O''C}^2 = \text{constante.}$$

Ainsi le théorème énoncé est général, quelle que soit la position du point O.

33. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de trois demi-diamètres conjugués sur un plan diamétral, est constante ; qu'on prenne le plan diamétral perpendiculaire au plan de la conique, on en conclut que

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées de trois points conjugués d'une ellipse sur une droite fixe menée dans le plan de cette courbe, est constante.

34. La somme des carrés des trois faces au sommet du tétraèdre formée par trois demi-diamètres conjugués est constante ;

On conclut de là, que

Dans le tétraèdre qui a pour sommet un point fixe de l'espace et *pour base le triangle formé par trois points conjugués quelconques, la somme des carrés des trois faces au sommet est constante.*

Et comme le triangle qui sert de base au tétraèdre a lui-même son aire constante, on peut dire que

La somme des carrés des quatre faces du tétraèdre est constante.

35. La somme des carrés des projections des trois faces au sommet du tétraèdre formé par trois demi-diamètres conjugués, sur un plan fixe, est constante; on conclut de là et du théorème (30) que

Le tétraèdre qui a pour sommet un point fixe de l'espace, et pour base le triangle formé par trois points conjugués, jouit de cette propriété que la somme des carrés des projections de ses faces sur un plan fixe est constante.

36. Si la projection est faite sur le plan de la figure, on en conclura, en ayant égard encore au théorème (30), que

Un point fixe pris dans le plan d'une conique étant le sommet commun à trois triangles ayant pour bases les trois côtés du triangle formé par trois points conjugués quelconques, la somme des carrés des aires de ces trois triangles sera constante.

37. Les plans tangents à une surface du second degré, aux extrémités de trois demi-diamètres conjugués, font sur une droite diamétrale fixe trois segments dont la somme des valeurs inverses des carrés est constante.

Supposons que les extrémités des trois demi-diamètres conjugués soient toujours sur une même section plane de la surface; les trois plans tangents passeront par un point fixe S, qui sera le sommet du cône circonscrit à la surface suivant cette courbe; ce point S, le centre O′ de la courbe et le centre O de la surface sont, comme on sait, en ligne droite. Supposons que la transversale OD, menée par le centre de la surface, soit parallèle au plan de la courbe; et par le centre O′ de cette courbe, menons dans son plan, une seconde transversale O′D′ parallèle à cette première; un plan tangent à la surface, en un des points de la courbe, rencontrera les deux transversales OD, O′D′ en deux points T, T′ qui seront en ligne droite avec le point S, puisque ce plan tangent passe par ce point; il s'ensuit que les deux segments OT, O′T′ sont entre eux dans le rappor $\frac{OS}{O'S}$; c'est-à-dire que le segment $O'T'$ est au segment OT dans une raison constante, quel que soit le point de la courbe, par lequel on a mené le plan tangent ; on conclut donc du théorème énoncé ci-dessus, que

Les tangentes à une conique, menées par trois points conjugués quelconques, font sur une droite fixe menée par le centre de la courbe, trois segments dont la somme des valeurs inverses des carrés est constante.

38. Concevons deux plans fixes menés par le centre d'une surface du second degré, et un système quelconque de trois demi-diamètres conjugués ; que de l'extrémité de chaque demi-diamètre on abaisse des perpendiculaires sur les deux plans, et qu'on fasse leur produit ; la somme des trois produits ainsi faits sera constante, quel que soit le système des trois demi-diamètres conjugués (*).

Supposons que les deux plans fixes soient perpendiculaires au plan de la courbe sur laquelle s'appuient les trois demi-diamètres conjugués ; on en conclura ce théorème :

Étant menées dans le plan d'une conique deux droites fixes, et étant pris sur cette courbe trois points conjugués quelconques, si de chacun de ces points on abaisse sur les deux droites des perpendiculaires, et qu'on fasse leur produit, la somme des trois produits ainsi faits sera constante.

Si les deux droites fixes se confondent, on a le théorème (33).

Nous n'avons pas besoin de montrer l'analogie qu'il y a entre les diverses propriétés des systèmes de *trois* points conjugués d'une conique, que nous venons de démontrer, et les propriétés des systèmes de *deux* diamètres conjugués : ces analogies sont évidentes.

39. Les deux modes de généralisation que nous avons appliqués précédemment aux propriétés des diamètres conjugués, par voie de projection et de perspective, s'appliquent aussi aux propriétés des systèmes de trois points conjugués.

Ainsi, par exemple, le théorème (32) donnera le suivant :

Étant données deux coniques dans un plan, si sur la première on

(*) J'admets ce théorème comme connu, quoiqu'il n'ait pas encore été donné ; je le démontrerai dans un autre moment, avec quelques autres propriétés nouvelles des diamètres conjugués.

prend trois points conjugués quelconques, et que du centre de la seconde on mène des rayons à ces trois points, la somme des carrés de ces trois rayons, divisés respectivement par les carrés des demi-diamètres de la seconde conique compris sur ces rayons, sera constante.

40. Si les deux coniques sont concentriques, et que la première soit un cercle, les trois points conjugués diviseront la circonférence en trois parties égales, et les trois rayons diviseront l'espace angulaire autour du centre en trois parties égales; on a donc ce théorème :

Si par le centre d'une conique on mène trois demi-diamètres divisant l'espace angulaire en trois parties égales, la somme des valeurs inverses des carrés de ces trois demi-diamètres sera constante.

Nous n'insisterons pas davantage sur la généralisation dont les propriétés des systèmes de trois points conjugués sont susceptibles, parce que nous reviendrons sur cet objet en traitant d'une manière générale des propriétés d'un système d'un nombre quelconque de points, pris d'une certaine manière sur une conique.

41. *Quatrième mode de généralisation.* Plusieurs des propriétés exprimées pour les carrés des distances conviennent aux cubes.

Ainsi, la somme des cubes des perpendiculaires abaissées des quatre extrémités de deux diamètres conjugués sur une droite fixe est constante.

Cette observation s'applique aussi à diverses propriétés des systèmes de trois points conjugués que nous venons de faire connaître.

Mais je reviendrai dans un autre moment sur cet objet en traitant, d'une manière générale, des propriétés de certains systèmes de points, en nombre quelconque, situés sur une section conique, où l'on aura à considérer non pas seulement les carrés et les cubes des lignes, mais aussi des puissances plus élevées.

42. Dans un autre article, nous appliquerons aux propriétés des sections coniques, relatives à leurs foyers, les quatre modes de généralisation que nous venons d'appliquer aux propriétés des diamètres conjugués : nous obtiendrons de cette manière plusieurs théorèmes nouveaux relatifs aux foyers des sections coniques.