JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Solution d'un problème de Probabilité

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 373-387.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__373_0>

SOLUTION

D'un problème de Probabilité;

PAR M. POISSON.

Ayant été chargé, cette année, du cours de Calcul des Probabilités qui se fait à la Faculté des Sciences, j'ai donné, dans ce cours, les solutions de plusieurs problèmes, parmi lesquelles je citerai la suivante, à cause des résultats curieux, et que je ne crois pas connus, auxquels elle conduit.

Trois joueurs A, B, C, jouent, deux à deux, une suite de coups; chaque nouveau coup est joué par le joueur qui a gagné le coup précédent, avec celui qui n'y a pas joué : le sort désigne les deux joueurs qui jouent au premier coup. La partie est finie, quand un des trois joueurs a gagné consécutivement les deux autres, ou deux coups de suite; et c'est ce joueur qui a gagné la partie. On demande de déterminer, pour les trois joueurs, les probabilités de gagner la partie, d'après les chances qu'ils ont de gagner à chaque coup, et selon que le sort les a désignés pour jouer ou pour ne pas jouer au premier coup.

Lorsque A et B jouent l'un contre l'autre, je représente par γ la chance de A pour gagner le coup et, conséquemment, par $1-\gamma$ celle de B. Lorsque ce sont C et A qui jouent ensemble, je représente de même par β la chance de C et par $1-\beta$ celle de A. Enfin, quand le coup se joue entre B et C, je désigne par α la chance de B et par $1-\alpha$ celle de C.

Je suppose que le premier coup soit joué entre A et B, et gagné par A. Il est facile de voir que, n étant un nombre entier quelconque, et tant que la partie ne sera pas finie, tous les coups dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n-2$, seront joués entre A et B, et gagnés par A ; tous ceux dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n-1$, seront joués entre C et A, et gagnés par C; et tous ceux dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n$, seront joués entre B et C, et gagnés par B.

J'appelle x_{3n-2} la probabilité que la partie ne sera pas encore terminée, au coup dont le rang est $3n-2$, et x'_{3n-2} la probabilité qu'elle se terminera précisément à ce coup. Je désigne de même par y_{3n-1} la probabilité que la partie ne se terminera pas dans les $3n-1$ premiers coups, et par y'_{3n-1} la probabilité qu'elle finira au dernier de ces coups. Enfin, soient z_{3n} la probabilité que la partie ne sera pas terminée dans les $3n$ premiers coups, et z'_{3n} la probabilité qu'elle finira seulement au coup dont le rang est $3n$.

Ces diverses notations, les rangs des coups auxquels elles répondent, les joueurs qui jouent à chacun de ces coups, et leurs chances de gagner, seront faciles à se représenter par ce tableau :

$3n-2$,	$3n-1$,	$3n$,
x_{3n-2},	y_{3n-1},	z_{3n},
x'_{3n-2},	y'_{3n-1},	z'_{3n},
A et B,	C et A,	B et C,
γ et $1-\gamma$.	β et $1-\beta$.	α et $1-\alpha$.

Les valeurs des quantités α, β, γ, sont données, et peuvent s'étendre depuis zéro jusqu'à l'unité. Elles seront toutes trois égales à $\frac{1}{2}$, lorsque les trois joueurs seront d'égale force. Elles pourront être toutes trois plus grandes que $\frac{1}{2}$: ce cas aura lieu, quand A jouant contre B sera le plus fort; que C jouant contre A sera aussi le plus fort; que B jouant contre C sera encore le plus fort, ce qui n'est point incompatible avec les deux premières suppositions. Concevons, par exemple, que l'on ait trois urnes A', B', C', contenant des boules blanches et des boules noires, et dont chacune renferme plus de boules de la première couleur que de la seconde. Supposons aussi que le jeu entre A et B, consiste à tirer une boule de C', et que A gagne, si cette boule est blanche; qu'ensuite, le jeu entre C et A consiste à tirer une boule de B', et que la chance favorable à C soit l'arrivée d'une boule blanche; et qu'enfin, le jeu entre B et C soit de tirer une boule de A', qui fera gagner B, quand elle sera blanche : dans ce cas, on aura

$$\gamma > \tfrac{1}{2}, \quad \beta > \tfrac{1}{2}, \quad \alpha > \tfrac{1}{2}.$$

Il pourra arriver que l'unité ou zéro soit la valeur de l'une de ces quantités α, β, γ, de deux d'entre elles, ou de toutes trois : le cas de $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, par exemple, sera celui où A sera certain de gagner B, C de gagner A, et B de gagner C.

Cela posé, pour que la partie ne soit pas finie, au coup dont le rang est $3n+1$ ou $3(n+1)-2$, joué entre A et B, il faut, et il suffit 1°. qu'elle ne le soit pas au coup précédent, joué entre B et C, et gagné par B; 2°. que le coup dont le rang est $3n+1$ soit gagné par A. La probabilité x_{3n+1} de la partie non terminée à ce coup, sera donc le produit de la probabilité γ qu'il sera gagné par A, et de la probabilité z_{3n} que la partie ne sera pas finie au coup dont le rang est $3n$, de sorte que l'on aura

$$x_{3n+1} = \gamma z_{3n}.$$

On trouvera de même

$$x'_{3n+1} = (1-\gamma) z_{3n};$$

car pour que la partie finisse précisément au coup dont le rang est $3n+1$, il faudra et il suffira qu'elle ne soit pas terminée au coup précédent, et que le joueur B qui aura gagné celui-ci et dont $1-\gamma$ est la chance de gagner A au coup dont le rang est $3n+1$, gagne effectivement ce second coup. Par un raisonnement semblable, appliqué successivement aux coups dont les rangs sont $3n$ et $3n-1$, on obtiendra ces deux autres couples d'équations

$$z_{3n} = \alpha y_{3n-1}, \quad z'_{3n} = (1-\alpha) y_{3n-1},$$
$$y_{3n-1} = \beta x_{3n-2}, \quad y'_{3n-1} = (1-\beta) x_{3n-2},$$

qui se déduisent d'ailleurs du couple précédent, par de simples changements de lettres.

On tire de ces équations

$$x_{3n+1} z_{3n} y_{3n-1} = \alpha \beta \gamma z_{3n} y_{3n-1} x_{3n-2};$$

et en faisant, pour abréger,

$$\alpha \beta \gamma = k,$$

il en résulte

$$x_{3n+1} = k x_{3n-2};$$

équation aux différences finies, dont l'intégrale se trouve en y mettant successivement $1, 2, 3, \ldots n-1$, à la place de n, multipliant membre à membre les $n-1$ équations qui s'obtiendront de cette manière, et réduisant; ce qui donne

$$x_{3n-2} = k^{n-1} x_1.$$

Le facteur x_1 est la constante arbitraire; au premier coup, ou quand $n=1$, il est certain que la partie n'est pas terminée; on a donc $x_{3.1-2} = x_1 = 1$; et de là, et des équations précédentes, on conclut ces valeurs

$$x_{3n-2} = k^{n-1}, \quad y_{3n-1} = \beta k^{n-1}, \quad z_{3n} = \alpha \beta k^{n-1},$$
$$y'_{3n-1} = (1-\beta) k^{n-1}, \quad z'_{3n} = (1-\alpha) \beta k^{n-1}, \quad x'_{3n+1} = (1-\gamma) \beta \alpha k^{n-1}$$

Ces résultats se vérifieront facilement dans les cas extrêmes où l'une des quantités α, β, γ, sera zéro ou l'unité. Si, par exemple, elles sont toutes trois l'unité, les trois probabilités y'_{3n-1}, z'_{3n}, x'_{3n+1}, seront nulles, et il sera certain que la partie ne finira jamais, ce qui est évident. Si l'une des fractions α, β, γ, est zéro, on aura aussi $k=0$; ces trois probabilités seront donc nulles, excepté pour $n=1$; par conséquent, la partie ne pourra finir qu'au second coup, ou au troisième, ou au quatrième; les probabilités respectives de ces trois événements, seront

$$y'_2 = 1 - \beta, \quad z'_3 = (1-\alpha)\beta, \quad x'_4 = (1-\gamma)\beta\alpha;$$

et comme leur somme est l'unité, à cause de $\alpha\beta\gamma = 0$, il s'ensuit que la partie finira certainement à l'un de ces trois coups.

Dans le cas de $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, où les trois joueurs sont d'égale force, on a $k = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Quel que soit le nombre entier m, la probabilité que la partie ne sera pas terminée dans les m premiers coups, devient donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$, d'après les trois premières équations précédentes ; et la probabilité qu'elle finira précisément au $m^{ième}$ coup, devient aussi $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$, d'après les trois dernières.

Dans le cas général, où α, β, γ, sont des fractions quelconques, si l'on représente par q_{3n-1}, la probabilité que la partie finira à l'un des n coups dont les rangs répondent aux nombres $2, 5, 8, 11, \ldots 3n-1$; par r_{3n}, la probabilité qu'elle se terminera à l'un des n coups dont les rangs répondront à $3, 6, 9, 12, \ldots 3n$; par p_{3n+1}, la probabilité qu'elle se terminera à l'un des n coups dont les nombres $4, 7, 10, 13, \ldots 3n+1$, marquent les rangs, on aura

$$\begin{aligned} q_{3n-1} &= y'_2 + y'_5 + y'_8 + y'_{11} + \ldots + y'_{3n-1}, \\ r_{3n} &= z'_3 + z'_6 + z'_9 + z'_{12} + \ldots + z'_{3n}, \\ p_{3n+1} &= x'_4 + x'_7 + x'_{10} + x'_{13} + \ldots + x'_{3n+1}; \end{aligned}$$

et d'après les formules précédentes, on en conclura

$$\begin{aligned} q_{3n-1} &= \frac{(1-\beta)(1-k^n)}{1-k}, \\ r_{3n} &= \frac{\beta(1-\alpha)(1-k^n)}{1-k}, \\ p_{3n+1} &= \frac{\alpha\beta(1-\gamma)(1-k^n)}{1-k}. \end{aligned}$$

Si nous appelons s_n la probabilité que la partie finira dans les $3n$ premiers coups, à partir du second inclusivement, nous aurons

$$s_n = q_{3n-1} + r_{3n} + p_{3n+1};$$

et à cause de

$$1 - \beta + \beta(1-\alpha) + \alpha\beta(1-\gamma) = 1 - \alpha\beta\gamma = 1 - k,$$

il en résultera

en sorte que cette probabilité sera la même, quels que soient les deux joueurs qui joueront le premier coup, et quel que soit aussi, le joueur qui le gagnera. Il n'en sera pas de même à l'égard des probabilités que la partie finira dans les $3n-1$ ou dans les $3n+1$ premiers coups, non compris le premier de tous; probabilités qui se déduiront de s_n, en en retranchant la valeur de x'_{3n+1}, ou en y ajoutant celle de y'_{3n+1}. Si l'on exclut le cas où les trois quantités α, $\mathcal{C}$, γ, sont l'unité, et où l'on a $k=1$, on voit que la probabilité que la partie ne se prolongera pas au-delà d'un nombre de coups donnés, approchera indéfiniment de l'unité à mesure que ce nombre deviendra plus grand, mais qu'elle ne se changerait dans la certitude que si ce nombre devenait infini. Dans le cas des joueurs d'égale force, en désignant par m un nombre entier quelconque et par t_m la probabilité que la partie finira dans les m premiers coups à partir du second inclusivement, on aura

$$t_m = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m;$$

de sorte qu'il suffira, par exemple, qu'on ait $m=10$, pour que la probabilité $1-t_m$ de l'événement contraire, tombe au-dessous d'un millième.

Maintenant soient a, b, c, les probabilités que la partie prolongée à l'infini, s'il le faut sera gagnée respectivement par A, B, C. Pour que A gagne il est nécessaire et il suffit que la partie se termine à un coup dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n-1$; la valeur de a se déduira donc de celle de q_{3n-1}, en y faisant $n=\infty$; ce qui donne

$$a = \frac{1-\mathcal{C}}{1-k},$$

en excluant le cas où l'on a $k=1$, et où la partie ne finit jamais. On verra de même que b et c sont les valeurs de p_{3n+1} et r_{3n} qui répondent à $n=\infty$; en sorte que l'on a

$$b = \frac{\alpha\mathcal{C}(1-\gamma)}{1-k}, \quad c = \frac{\mathcal{C}(1-\alpha)}{1-k}$$

Comme il est certain que la partie sera gagnée par un des trois joueurs, on devra avoir

$$a + b + c = 1;$$

ce qui a lieu effectivement.

Chacune de ces fractions a, b, c, multipliée par l'*enjeu*, ou la somme des trois *mises*, sera l'espérance mathématique de l'un des joueurs; lequel aura de l'avantage ou du désavantage, selon que ce produit sera plus grand ou plus petit que sa mise. A une époque quelconque du jeu, où la partie n'est pas finie, et où A vient de gagner B; si les joueurs conviennent de ne point achever, l'enjeu devra être partagé entre A, B, C, proportionnellement aux fractions a, b, c.

Il résulte de leurs expressions, que dans le cas même des joueurs d'égale force, la chance de gagner la partie est inégale pour les joueurs qui jouent les premiers, et pour celui qui n'entre au jeu qu'au second coup. En effet, en faisant

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{8},$$

on aura

$$a = \frac{4}{7}, \quad b = \frac{1}{7}, \quad c = \frac{2}{7}.$$

Après le premier coup, le joueur qui l'a gagné a donc droit à $\frac{4}{7}$ de l'enjeu, celui qui l'a perdu n'a droit qu'à $\frac{1}{7}$, et celui qui n'a pas joué a droit à $\frac{2}{7}$; mais avant que ce coup ne soit joué, les deux joueurs que le sort a désigné pour le jouer, ont une égale chance de le gagner; leur probabilité de gagner la partie est donc alors $\frac{1}{2}(a+b)$, ou $\frac{5}{14}$, c'est-à-dire qu'elle surpasse de $\frac{1}{14}$ la chance $\frac{2}{7}$, ou $\frac{4}{14}$ du joueur qui n'entre qu'au second coup. Si la mise de chaque joueur est représentée par μ, et que l'on convienne de ne pas jouer la partie, après que le sort a désigné les deux joueurs qui devaient la commencer, chacun de ceux-ci devra prendre $\frac{15}{14}$ de μ, sur l'enjeu égal à 3μ, et le troisième joueur $\frac{12}{14}$ de μ seulement; ou autrement dit, les trois joueurs ayant retiré leurs mises, le troisième devra, en outre, donner $\frac{1}{14}$ de μ à chacun des deux premiers.

En général, avant que le sort ait désigné les deux joueurs qui doivent jouer le premier coup, les probabilités de gagner la partie seront différentes de a, b, c; pour les trois joueurs A, B, C, je les représenterai respectivement par f, g, h; chacune d'elles dépendra des trois chances données α, β, γ; et il suffira de déterminer la valeur de f en fonction de α, β, γ: les valeurs de g et h s'obtiendront de la même manière, ou se déduiront de f par de simples permutations.

Il pourra arriver que le premier coup soit joué par A et B, par C et A, par B et C. Ces trois combinaisons étant également probables, la probabilité de chacune d'elles sera égale à $\frac{1}{3}$; de plus, dans la premiere combinaison, la probabilité que le premier coup sera gagné par A aura γ pour valeur, et par B, elle sera $1-\gamma$; dans la seconde, la probabilité que C gagnera le premier coup sera β, et la probabilité qu'il sera gagné par A aura $1-\beta$ pour valeur; dans la dernière, il y aura la probabilité α que le premier coup sera gagné par B, et la probabilité $1-\alpha$ qu'il le sera par C: chacune de ces trois combinaisons donnant lieu à deux cas différents, il y aura donc six cas possibles, dont les probabilités respectives seront

$$\tfrac{1}{3}\gamma, \quad \tfrac{1}{3}(1-\gamma), \quad \tfrac{1}{3}\beta. \quad \tfrac{1}{3}(1-\beta), \quad \tfrac{1}{3}\alpha, \quad \tfrac{1}{3}(1-\alpha).$$

Or, il s'agira de déterminer successivement, dans chacun de ces six cas, la probabilité que A gagnera la partie; en multipliant ensuite chaque probabilité par celle du cas à laquelle elle répond, et faisant la somme des six produits, on aura la valeur complète de f.

Dans le premier cas, où le coup est joué par A et B, et gagné par A, la probabilité que A gagnera la partie sera la valeur précédente de a; le premier terme de la valeur de f sera donc $\frac{1}{3}\gamma a$, ou

$$\frac{\gamma(1-\beta)}{3(1-k)}.$$

Dans le second cas, où c'est A jouant contre B, qui perd le premier coup, la probabilité que A gagnera la partie sera la valeur précédente de b, dans laquelle on devra changer γ en $1-\gamma$, β en $1-\alpha$, α en $1-\beta$; en multipliant le résultat par $\frac{1}{3}(1-\gamma)$, on aura donc

$$\frac{k'\gamma}{3(1-k')},$$

pour le second terme de f, où l'on a fait, pour abréger,

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = k'.$$

Dans le troisième cas, où le premier coup sera joué par C et A, et gagné par C, la probabilité de A pour gagner la partie sera ce que devient l'expression de b, relative au joueur qui perd le premier coup, lorsqu'on y change γ en β, β en α, α en γ; en multipliant ensuite par $\frac{1}{3}\beta$, il en résultera

$$\frac{k(1-\beta)}{3(1-k)},$$

pour le troisième terme de f.

Dans le quatrième cas, où le premier coup est gagné par A jouant contre C, la probabilité que A gagnera la partie sera l'expression de a, dans laquelle il faudra changer γ en $1-\beta$, β en $1-\gamma$, α en $1-\alpha$: en multipliant le résultat par $\frac{1}{3}(1-\beta)$, on aura ensuite

$$\frac{\gamma(1-\beta)}{3(1-k')},$$

pour le quatrième terme de f.

Dans le cinquième cas, où le premier coup est joué par B et C, et gagné par B, la probabilité que A gagnera la partie sera ce que devient l'expression de c, relative au joueur qui ne joue pas à ce premier coup, quand on y change γ en α, β en γ, α en β; en multipliant le résultant par $\frac{1}{3}\alpha$, il vient

$$\frac{\alpha\gamma(1-\beta}{3(1-k)},$$

pour le cinquième terme de f.

Enfin, dans le sixième et dernier cas, où le premier coup est gagné par C jouant contre B, la probabilité que A gagnera la partie se déduira encore de l'expression de c, mais en changeant γ en $1-\alpha$, 6 en $1-6$, α en $1-\gamma$; ce qui, après avoir multiplié par $\frac{1}{3}(1-\alpha)$, donne

$$\frac{\gamma(1-\alpha)(1-6)}{3(1-k')},$$

pour le dernier terme de f.

Si l'on fait actuellement la somme de ces six valeurs partielles de f, on aura, pour sa valeur complète,

$$f=\frac{\gamma(1-6)(1+\alpha+\alpha 6)}{3(1-k)}+\frac{\gamma k'+\gamma(1-6)+\gamma(1-\alpha)(1-6)}{3(1-k')}.$$

La raison des diverses permutations des lettres α, 6, γ, que nous venons d'indiquer, est facile à saisir en jetant les yeux sur le tableau présenté plus haut. On verra de même que pour déduire de l'expression de f, celle de g, il suffira de changer γ en α, 6 en γ, α en 6, dans f; et pour obtenir ensuite la valeur de h, il faudra répéter encore cette permutation tournante dans la valeur de g, ou bien changer tout de suite γ en 6, 6 en α, α en γ, dans la valeur de f. De cette manière, nous aurons

$$g=\frac{\alpha(1-\gamma)(1+6+6\gamma)}{3(1-k)}+\frac{\alpha k'+\alpha(1-\gamma)+\alpha(1-6)(1-\gamma)}{3(1-k')},$$
$$h=\frac{6(1-\alpha)(1+\gamma+\gamma\alpha)}{3(1-k)}+\frac{6k'+6(1-\alpha)+6(1-\gamma)(1-\alpha)}{3(1-k')}.$$

Quand les joueurs sont d'égale force, ou qu'on a $\alpha=6=\gamma=\frac{1}{2}$, ces trois probabilités f, g, h, doivent être égales entre elles et à $\frac{1}{3}$; ce qu'on vérifie aisément. Quelles que soient les chances α, 6, γ, il faut qu'on ait

$$f+g+h=1,$$

puisqu'il est certain que la partie sera gagnée par l'un des trois joueurs, en excluant, toutefois, le cas où l'on aurait $k=1$, et où elle ne finirait pas. C'est aussi ce qu'il est aisé de vérifier, en ayant égard à ce que k et k' représentent.

Si les deux joueurs B et C sont d'égale force, soit lorsqu'ils jouent l'un contre l'autre, soit quand ils jouent contre A, il faudra faire

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1 - \gamma;$$

la quantité γ pourra encore être une fraction quelconque; elle exprimera la chance de A, de gagner chacun des coups où il jouera; et A sera plus fort ou plus faible que chacun des deux autres joueurs, selon qu'on aura $\gamma > \frac{1}{2}$ ou $\gamma < \frac{1}{2}$. Pour ces valeurs de α et β, on aura, comme cela doit être,

$$g = h = \frac{1}{2}(1 - f);$$

et la valeur de f se réduira à

$$f = \frac{8\gamma^2 - 2\gamma^3}{3(2 - \gamma + \gamma^2)}.$$

Si la mise est la même pour chacun des trois joueurs, et qu'on la représente par μ, l'enjeu sera 3μ, et l'espérance mathématique de A aura $3\mu f$ pour valeur. Elle serait $2\mu\gamma$, si A jouait toujours à mise égale, mais en un seul coup, et contre un seul des deux autres joueurs; dans le cas des mises égales, le joueur A de force inégale, doit donc préférer de jouer au jeu que nous considérons, contre les joueurs B et C de forces égales, ou bien il doit choisir de jouer une partie simple, contre B ou C, selon que la différence $3\mu f - 2\mu\gamma$ est positive ou négative. Or, d'après la valeur précédente de f, on a

$$3\mu f - 2\mu\gamma = \frac{2\mu\gamma(2 - \gamma)(2\gamma - 1)}{2 - \gamma + \gamma^2};$$

quantité positive ou négative, selon que γ surpasse $\frac{1}{2}$ ou est moindre. Il s'ensuit donc que le joueur A, s'il est le plus fort, ou si γ surpasse $\frac{1}{2}$, augmentera encore son avantage, en choisissant la première manière de jouer, et que s'il est le plus faible, ou si l'on a $\gamma < \frac{1}{2}$, il diminuera son désavantage, en choisissant la seconde.

Lorsque les joueurs, au lieu de mettre, une fois pour toutes, une somme au jeu, conviennent d'y mettre une somme μ à chaque fois qu'ils y entrent, de sorte que l'enjeu croisse continuellement avec le nombre des coups, l'espérance mathématique de chacun d'eux ne sera plus la même que précédemment, et à force égale, par exemple, l'avantage qui était tout à l'heure pour les joueurs qui jouent le premier coup, sera maintenant pour celui qui n'entre qu'au second coup.

Afin de calculer commodément l'espérance mathématique de chaque joueur, il faudra la diviser en deux parties : l'une positive, et provenant des sommes que le joueur pourra recevoir aux différents coups qui seront joués ; l'autre négative, et provenant des sommes qu'il pourra payer. Pour le joueur A qui gagne le premier coup, je désignerai par a' la première partie, par $a_{,}$ la seconde, abstraction faite du signe, et par φ l'excès de celle-là sur celle-ci. Je représenterai les quantités analogues par b', $b_{,}$, ψ, pour le joueur B qui perd le premier coup, et par c', $c_{,}$, θ, pour le joueur C qui n'entre qu'au second coup. De cette manière, on aura

$$\varphi = a' - a_{,}, \quad \psi = b' - b_{,}, \quad \theta = c' - c_{,}.$$

Au $m^{ième}$ coup, si la partie n'est pas finie auparavant, l'enjeu sera égal à $(m+1)\mu$. Or, d'après ce qu'on a vu précédemment, les probabilités que la partie sera finie, et gagnée alors par A, au second coup, au cinquième, au huitième, au onzième, etc., seront

$$(1 - \mathfrak{C}), \quad (1 - \mathfrak{C})k, \quad (1 - \mathfrak{C})k^2, \quad (1 - \mathfrak{C})k^3, \quad \text{etc.};$$

les gains attachés aux arrivées de ces événements étant donc

$$3\mu, \quad 6\mu, \quad 9\mu, \quad 12\mu, \quad \text{etc.},$$

il suit de la règle de l'espérance mathématique, que la valeur complète de a' sera la somme de ces deux séries multipliées terme à terme et prolongées jusqu'à l'infini ; ce qui donne

$$a' = 3\mu(1 - \mathfrak{C})\Sigma ik^{i-1};$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier i, depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$. Mais on a

$$\Sigma k^i = \frac{k}{1-k};$$

et en différentiant par rapport à k, il vient

$$\Sigma i k^{i-1} = \frac{1}{(1-k)^2};$$

par conséquent, on aura

$$a' = \frac{3\mu(1-\delta)}{(1-k)^2}.$$

Pour A et B, il y a la certitude de jouer au premier coup, et pour C, au second. Pour A, les probabilités de rentrer ensuite au jeu, au quatrième coup, au septième, au dixième, au treizième, etc., ou, ce qui est la même chose, les probabilités que la partie ne sera pas terminée au troisième coup, au sixième, au neuvième, au douzième, etc., seront, comme on l'a trouvé plus haut,

$$\alpha\mathcal{C}, \quad \alpha\mathcal{C}k, \quad \alpha\mathcal{C}k^2, \quad \alpha\mathcal{C}k^3, \quad \text{etc.};$$

la valeur complète de $a_,$ sera donc la somme de cette série infinie de fractions, multipliée par μ, et augmentée de μ pour la première mise de A; en sorte que l'on aura

$$a_, = \mu + \frac{\mu\alpha\mathcal{C}}{1-k}.$$

La probabilité que la partie se terminera au coup dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n+1$, auquel cas elle sera gagnée par B, étant

$$\alpha\mathcal{C}(1-\gamma)k^{n-1},$$

et l'enjeu que B recevra alors, ayant $3n\mu + 2\mu$ pour valeur, on en conclut que la valeur complète de b', sera

$$b' = \mu\alpha\mathcal{C}(1-\gamma)(3\Sigma n k^{n-1} + 2\Sigma k^{n-1});$$

les sommes Σ s'étendant depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. Donc, en ayant égard aux valeurs de ces deux sommes, nous aurons

$$b' = \frac{3\mu\alpha\mathcal{C}(1-\gamma)}{(1-k)^2} + \frac{2\mu\alpha\mathcal{C}(1-\gamma)}{1-k}.$$

Par un raisonnement semblable, on trouvera de même

$$c' = \frac{3\mu\epsilon(1-\alpha)}{(1-k)^2} + \frac{\mu\epsilon(1-\alpha)}{1-k}.$$

On obtiendra aussi, sans difficulté,

$$b_{\prime} = \mu + \frac{\mu\epsilon}{1-k}, \quad c_{\prime} = \mu + \frac{\mu\alpha\epsilon\gamma}{1-k};$$

et de ces diverses valeurs, il résultera finalement

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{3\mu(1-\epsilon)}{(1-k)^2} - \mu - \frac{\mu\alpha\epsilon}{1-k},\\
\psi &= \frac{3\mu\alpha\epsilon(1-\gamma)}{(1-k)^2} + \frac{2\mu\alpha\epsilon(1-\gamma)}{1-k} - \mu - \frac{\mu\epsilon}{1-k},\\
\theta &= \frac{3\mu\epsilon(1-\alpha)}{(1-k)^2} + \frac{\mu\epsilon(1-\alpha)}{1-k} - \mu - \frac{\mu\alpha\epsilon\gamma}{1-k}.
\end{aligned}$$

Puisque tout l'argent mis successivement au jeu pendant la durée de la partie, est retiré par le joueur qui l'a gagnée, il s'ensuit que la somme des espérances mathématiques des trois joueurs doit être nulle; et en effet, d'après ce que k représente, on a identiquement

$$\varphi + \psi + \theta = 0.$$

En prenant $\frac{1}{2}$ pour chacune des fractions α, ϵ, γ, et en faisant $k = \frac{1}{8}$, on a

$$\varphi = \frac{33\mu}{49}, \quad \psi = -\frac{39\mu}{49}, \quad \theta = \frac{6\mu}{49},$$

pour les espérances mathématiques des trois joueurs supposés d'égale force. Cela signifie, par exemple, qu'avant qu'ils aient rien mis au jeu, et après que le premier coup a été joué; si l'on convenait de ne pas continuer la partie, le joueur qui a perdu ce premier coup devrait payer $\frac{39}{49}$ de μ, savoir, $\frac{33}{49}$ à celui qui l'a gagné, et $\frac{6}{49}$ à celui qui n'a pas joué. Après que le sort a désigné les deux joueurs qui doivent jouer le premier coup, et avant que ce coup ne soit joué, chacun d'eux peut également le gagner: l'espérance mathématique de chacun de ces joueurs est donc $\frac{1}{2}\cdot\frac{33\mu}{49} - \frac{1}{2}\cdot\frac{39\mu}{49}$, ou $-\frac{3\mu}{49}$, c'est-à-dire, que si l'on convenait de ne pas jouer la partie, chacun d'eux devrait donner $\frac{3}{49}$ de μ au troisième joueur, tandis que dans le cas que nous avons d'abord examiné, c'était ce premier joueur qui devait, au contraire, donner $\frac{1}{14}$ de μ à chacun des deux premiers joueurs. Si la partie n'est pas terminée au $m^{ième}$ coup, et que l'on convienne de ne pas la continuer, le joueur qui aura perdu ce coup devra, comme on vient de le dire, payer $\frac{33}{49}$ de μ à celui qui l'aura gagné, et $\frac{6}{49}$ au troisième joueur; et de plus, l'enjeu qui avait lieu au coup précédent, et qui s'élevait à $m\mu$, devra être partagé entre ces trois joueurs, proportionnellement à leurs chances $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, d'achever de gagner la partie; en sorte qu'au $m^{ième}$ coup, si l'on représente par φ' l'espérance mathématique du joueur qui gagne ce coup, par ψ' celle du joueur qui le perd, par θ' celle du joueur qui n'y joue pas, on aura

$$\varphi' = \frac{(28m + 33)\mu}{49}, \quad \psi' = \frac{(7m - 39)\mu}{49}, \quad \theta' = \frac{(14m + 6)\mu}{49}.$$

Lorsque m surpassera cinq, la valeur de ψ' sera positive, comme φ' et θ'; le joueur qui perdra le $m^{ième}$ coup n'aura rien à payer aux deux autres; seulement il aura droit à une moindre part dans l'enjeu qui avait lieu au coup précédent: si, par exemple, on a $m = 6$, l'enjeu qui avait lieu au cinquième coup sera égal à 6μ; sur quoi le joueur qui gagne le sixième coup devra prendre $\frac{201\mu}{49}$, celui qui le perd n'aura droit qu'à $\frac{3\mu}{49}$, et le troisième joueur à $\frac{90\mu}{49}$.