JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POISSON

Note relative à un passage de la Mécanique céleste

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 312-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__312_0>

NOTE

Relative à un passage de la Mécanique céleste :

PAR M. POISSON.

Dans le n° 26 du III^e livre, l'auteur s'est proposé de démontrer, sans recourir à la réduction en série, qu'un fluide homogène, tournant uniformément autour d'un axe fixe, n'a qu'une seule figure d'équilibre, très peu différente de la sphère. L'objection que M. Liouville a faite contre la généralité de cette démonstration est réelle (*); mais la démonstration générale qu'il a substituée à celle de la *Mécanique céleste* est fort compliquée, et l'on parvient plus simplement au résultat par les considérations suivantes, qui diffèrent moins de celles que Laplace avait employées.

Je conserve, sans les rappeler ici, toutes les notations du mémoire de M. Liouville, et l'équation (A) citée au commencement de l'article second, savoir :

$$C = \frac{4\pi\alpha}{3}\,Y - \alpha\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y' \sin p\,dp\,dq - \tfrac{1}{2}g(1-\mu^2). \qquad (A)$$

Le rayon vecteur r d'un point quelconque de la surface, est représenté par

$$r = a(1 + \alpha Y).$$

L'inconnue Y peut être une fonction quelconque de deux variables désignées par μ et ϖ, pourvu qu'elle conserve toujours une valeur finie. On ne suppose pas que la surface soit de révolution, ou que Y

(*) *Voyez* le cabier de ce journal du mois de juin dernier.

ne dépende pas de l'angle ϖ; on ne suppose pas non plus que le fluide ait son centre de gravité sur l'axe de rotation ; on suppose seulement sa figure très peu différente d'une sphère qui aurait son centre sur cet axe. La constante a peut différer du rayon de la sphère équivalente au volume du fluide, pourvu que la différence soit de l'ordre de petitesse de la fraction α, le même que celui de la fraction g, et dont on néglige le carré.

La condition rigoureuse de l'équilibre consiste en ce que la somme des éléments du fluide divisés par leurs distances respectives a un point quelconque de la surface, plus la quantité $\frac{1}{2} g(1 - \mu^2)$ qui provient de la force centrifuge de ce point, soit une constante. La partie de cette constante relative à la sphère du rayon a et indépendante de la force centrifuge, est égale à $\frac{4\pi a^2}{3}$; la partie relative à cette force et à la non-sphéricité du fluide, est la constante C de l'équation précédente, prise avec un signe contraire; en désignant par γ sa valeur complète, on a donc

$$\gamma = \frac{4\pi a^2}{3} - a^2 C.$$

Or, pour chaque figure possible d'équilibre, cette constante γ est évidemment une quantité déterminée qui ne peut pas dépendre du rayon que l'on prend pour a, c'est-à-dire, de la différence entre ce rayon et celui de la sphère équivalente au volume donné du fluide ; la constante C est donc indéterminée comme cette différence; de telle sorte que pour chaque valeur que l'on peut prendre pour a, l'équation précédente déterminera la valeur correspondante de C, et que, réciproquement, si l'on prend à volonté pour C une valeur qui soit de l'ordre de petitesse de α, cette équation déterminera le rayon a.

Cela posé, faisons

$$Y = l\mu + m\mu^2 + X;$$

l et m étant des constantes indéterminées, et X une nouvelle inconnue, fonction de μ et ϖ, dont toutes les valeurs sont des quantités finies. Soit c la plus grande de ces valeurs ; en faisant

$$c - X = Z,$$

l'inconnue Z ne pourra plus avoir que des valeurs positives, et l'expression de Y deviendra

$$Y = c + l\mu + m\mu^2 - Z.$$

Je la substitue dans l'équation (A). Ce que devient μ dans Y' étant désigné par μ', on a

$$\mu' = \mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q;$$

d'où il résulte

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mu' \sin p dp dq = \frac{4\pi}{3}\mu, \quad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mu'^2 \sin p dp dq = \frac{4\pi}{5}(\mu^2 + \tfrac{2}{3});$$

et comme on a aussi

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin p dp dq = 4\pi,$$

le résultat de cette substitution, sera

$$C = \left(\frac{8\pi\alpha}{15} m + \tfrac{1}{2} g\right)\mu^2 - \frac{16\pi\alpha}{15} m - \frac{8\pi\alpha}{3} c - \tfrac{1}{2} g$$
$$- \frac{4\pi\alpha}{3} Z + \alpha \int_0^\pi\int_0^{2\pi} Z' \sin p dp dq;$$

Z' étant ce que devient Z dans Y'. Or, les constantes m et C pouvant être prises arbitrairement, on peut supposer qu'on ait

$$\frac{8\pi\alpha}{15} m + \tfrac{1}{2} g = 0, \quad C = -\frac{16\pi\alpha}{15} m - \frac{8\pi\alpha}{3} c - \tfrac{1}{2} g;$$

ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci :

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Z' \sin p dp dq - \frac{4\pi}{3} Z = 0,$$

que l'on peut écrire sous cette forme :

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (Z' - \tfrac{1}{3} Z) \sin p dp dq = 0.$$

Maintenant, j'appelle h et k les valeurs de μ et ϖ qui répondent à la plus petite des valeurs possibles de Z, et je désigne par L cette plus petite valeur ; pour $\mu = h$ et $\varpi = k$, la dernière équation deviendra donc

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (Z' - \tfrac{1}{3} L) \sin p dp dq = 0;$$

mais il est évident que Z′ ou Z étant, par hypothèse, une quantité positive ou zéro, la différence $Z' - \frac{1}{3}L$ est aussi positive ou nulle; tous les éléments de l'intégrale double ayant donc le même signe, elle ne peut être nulle qu'autant que le facteur $Z' - \frac{1}{3}L$ sera zéro; condition qui ne peut être remplie qu'autant que Z′ ou Z sera aussi constamment zéro. D'ailleurs, on tire des équations précédentes

$$m = -\frac{15g}{16\pi\alpha}, \quad c = \frac{3g}{16\pi\alpha} - \frac{3}{8\pi a}C;$$

en substituant donc ces valeurs de m et c dans l'expression de Y, supprimant le terme Z, et mettant ensuite cette expression dans celle de r, nous aurons

$$r = a\left[1 + \frac{3(g - 2C)}{16\pi} + \alpha l\mu - \frac{15g}{16\pi}\mu^2\right].$$

Ce résultat renferme la constante indéterminée αl qui tient à l'origine, aussi indéterminée, des coordonnées sur l'axe de rotation. On la fera aisément disparaître par un déplacement convenable de cette origine sur cette droite, ou si l'on veut, on peut tout de suite la supposer nulle, et écrire

$$r = a\left[1 + \frac{3(g - 2C)}{16\pi} - \frac{15g}{16\pi}\mu^2\right].$$

On fera aussi disparaître, sans difficulté, les constantes a et C que renferme cette valeur de r. En effet, soit

$$a\left[1 + \frac{3(g - 2C)}{16\pi}\right] = b\left(1 + \frac{5g}{16\pi}\right); \qquad (a)$$

en négligeant les carrés et le produit de g et C, et faisant, pour abréger,

$$\frac{15g}{16\pi} = n,$$

il en résultera finalement

$$r = b\left[1 + n\left(\tfrac{1}{3} - \mu^2\right)\right].$$

Or, il est facile de s'assurer, d'après cette expression de r, que b est le rayon donné de la sphère équivalente au volume du fluide ; cette expression ne contient donc plus rien d'inconnu ou d'indéterminé ; et l'on en conclut que le fluide n'a qu'une seule figure possible d'équilibre, qui s'écarte très peu de la sphère ; ce qu'il s'agissait de prouver.

Cette démonstration est plus simple que celle qui est fondée sur la réduction de r en série d'une certaine forme, et qui suppose connues les propriétés des termes de ce développement, ainsi que la généralité de cette forme de série, que l'on avait contestée, mais que j'ai mise hors de doute dans mon mémoire sur l'*attraction des sphéroïdes* (*).

Si l'on met

$$a = b, \quad \alpha Y = n(\tfrac{1}{3} - \mu^2),$$

dans l'expression $a(1 + \alpha Y)$ de r, ce qui l'a fait coïncider avec la valeur finale de ce rayon vecteur; que l'on désigne par B, la valeur de la constante C qui répond à ces valeurs de a et de αY ; et que l'on ait égard à ce que n représente, on trouvera sans difficulté que l'équation (A) se réduit à

$$B = -\tfrac{1}{3} g.$$

On aura, en même temps,

$$\gamma = \frac{4\pi b^3}{3} + \tfrac{1}{3} g b^4;$$

et comme, d'après ce qu'on a dit plus haut, cette quantité γ doit être la même, quel que soit le rayon peu différent de b que l'on prenne pour a, il faudra qu'on ait

$$\frac{4 b^3}{3} + \tfrac{1}{3} g b^4 = \frac{4\pi a^3}{3} - a^4 C;$$

résultat qui coïncide, en effet, avec l'équation (a), en négligeant toujours les carrés et le produit de g et de C.

(*) *Additions à la Connaissance des Temps* année 1829.