JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Théorèmes sur les contacts des lignes et des surfaces courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 299-311.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__299_0>

THÉORÈMES

Sur les contacts des lignes et des surfaces courbes ;

PAR M. CHASLES.

Des courbes planes. On dit que deux courbes ont un contact de l'ordre m, quand elles ont m éléments consécutifs communs; et alors elles passent par $(m+1)$ points infiniment voisins. Cette condition *géométrique,* traduite en *analyse,* fait voir que les deux courbes étant exprimées par deux équations entre les coordonnées x, y, obliques ou rectangulaires, il faut que les m premiers coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}$, de la première courbe soient égaux respectivement à ceux de la seconde, quand on y met pour x et y les coordonnées du point de contact.

Ainsi deux courbes auront un contact de l'ordre m en un point, quand on reconnaîtra que l'une de ces deux conditions, *géométrique* et *algébrique*, a lieu.

Si de l'équation de la première courbe on tire la valeur de la coordonnée x, et qu'on la mette dans l'équation de la seconde courbe, cette équation donnera les ordonnées y des points d'intersection des deux courbes. Ces deux courbes passant par $(m+1)$ points infiniment voisins, qui, dans la réalité, se réunissent en un seul, l'équation en y aura $(m+1)$ racines égales, pour chaque point où les deux courbes ont un contact de l'ordre m. Cette équation sera donc de la forme $(\mathrm{F}y)^{m+1} \times fy = 0$; l'équation $\mathrm{F}y = 0$ correspondant aux points en chacun desquels les courbes ont un contact de l'ordre m, et l'équation $fy = 0$ aux autres points d'intersection des deux courbes.

D'après cela, soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation de la première courbe; celle de la seconde pourra nécessairement être mise sous la forme

$$A\varphi(x, y) + B[\psi(x, y)]^{m+1} = 0;$$

A et B pouvant être des constantes ou des fonctions de x et y. Car la valeur de x tirée de la première équation $\varphi(x, y) = 0$, et mise dans la seconde, réduira celle-ci à la forme

$$fy \cdot (Fy)^{m+1} = 0;$$

comme nous venons de faire voir que cela doit être. Et le point de contact, ou les points de contact des deux courbes seront déterminés par les deux équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

1er Théorème. *Les deux équations*

$$\varphi = 0, \quad \text{et} \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = 0,$$

où A, B, φ *et* ψ *sont des fonctions de* x *et* y, *représentent deux courbes qui ont un contact de l'ordre* m *en chacun des points d'intersection des deux courbes* $\varphi = 0$ *et* $\psi = 0$;

Et réciproquement, *deux courbes qui ont un contact de l'ordre* m *en un ou plusieurs points, peuvent être représentées par deux équations de cette forme.*

Nous venons d'obtenir les deux équations ci-dessus, en nous servant de la condition *géométrique* pour que deux courbes aient un contact de l'ordre m; il est facile de vérifier qu'elles satisfont à la condition *algébrique*, c'est-à-dire que les m coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}$ sont égaux respectivement un à un, dans les deux courbes, pour les points dont les cordonnées satisfont aux deux équations $\varphi = 0$, et $\psi = 0$.

En effet, supposons d'abord que A et B soient des quantités constantes, c'est-à-dire ne contenant ni x ni y; les différentiations successives des équations des deux courbes donneront, pour la première, les m équations

$$d\varphi = 0,\quad d^2\varphi = 0,\quad d^3\varphi = 0,\ldots d^m\varphi = 0,$$

d'où l'on tirera les valeurs des m premiers coefficients différentiels de cette première courbe; et pour la seconde, les m suivantes qui serviront aussi pour calculer les m premiers coefficients différentiels de la seconde courbe,

$$Ad\varphi + B(m+1)\psi^m.d\psi = 0,$$
$$Ad^2\varphi + B(m+1)m.\psi^{m-1}(d\psi)^2 + B(m+1)\psi^m.d^2\psi = 0,$$
$$Ad^3\varphi + B(m+1).m.(m-1)\psi^{m-2}(d\psi)^3 + \ldots + B(m+1)\psi^m d^3\psi = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Ad^m\varphi + B(m+1).m.(m-1)\ldots 3.2.\psi(d\psi)^m + \ldots + B(m+1)\psi^m.d^m\psi = 0.$$

Tous les termes de chacune de ces équations, excepté le premier, contiennent le facteur ψ élevé à des puissances qui vont en augmentant jusqu'au dernier terme où l'exposant de ψ est toujours m. On voit donc que pour chacun des points de la seconde courbe, dont les coordonnées satisfont à l'équation $\psi = 0$, toutes les équations se réduiront à celles-ci :

$$d\varphi = 0,\quad d^2\varphi = 0,\quad d^3\varphi = 0,\ldots d^m\varphi = 0.$$

Ce sont précisément les équations provenant de la différentiation de l'équation $\varphi = 0$ de la première courbe. Donc les m premiers coefficients différentiels des deux courbes sont égaux un à un; et conséquemment les deux courbes ont un contact de l'ordre m, en chacun de leurs points communs dont les coordonnées satisfont à l'équation $\psi = 0$.

Les deux courbes ne peuvent avoir, en général, un contact d'un ordre plus élevé: parce qu'une différentiation de plus de l'équation donnerait

$$Ad^{m+1}\varphi + B(m+1).m.(m-1)\ldots 2.1.(d\psi)^{m+1} + \ldots + B(m+1)\psi^m d^{m+1}\psi = 0;$$

et la supposition de $\psi = 0$ ne réduit plus cette équation à son premier terme seulement, mais bien à ses deux premiers termes; et par conséquent la valeur de $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$ qu'on en tirerait ne sera pas égale à celle que donnerait l'équation $d^{m+1}\varphi = 0$ de la première courbe.

Il nous reste à démontrer le théorème pour le cas où A et B sont des fonctions de x et y.

D'abord si nous supposons que B soit une fonction de x et de y, nos m équations différentielles de la seconde courbe contiendront de nouveaux termes provenant de la différentiation de B, et qui seront tous multipliés par des puissances de ψ. Donc, quand on fera $\psi = 0$, ces termes disparaîtront et les équations se réduiront encore à leurs premiers termes.

Enfin, quand A est aussi une fonction de x et y, au lieu des simples termes $\mathrm{A}d\varphi$, $\mathrm{A}d^2\varphi$, $\mathrm{A}d^3\varphi$,.... auxquels se réduisent les premiers membres des équations différentielles de la seconde courbe, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}d\varphi + \varphi d\mathrm{A} = 0,\\
&\mathrm{A}d^2\varphi + 2d\mathrm{A}.d\varphi + \varphi d^2\mathrm{A} = 0,\\
&\mathrm{A}d^3\varphi + 3d\mathrm{A}d^2\varphi + 3d\varphi d^2\mathrm{A} + \varphi d^3\mathrm{A} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais comme on a $\varphi = 0$, la première équation se réduit à $d\varphi = 0$, par suite la seconde se réduit à $d^2\varphi = 0$; puis la troisième à $d^3\varphi = 0$; et ainsi des autres. De sorte que dans le cas où A et B sont des fonctions de x et y, les deux équations $\varphi = 0$, et $\mathrm{A}\varphi + \mathrm{B}\psi^{m+1} = 0$, représentent encore deux courbes qui ont un contact de l'ordre m en chacun des points d'intersection des deux courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

2^e^ Théorème. *Si les courbes représentées par les deux équations $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, ont un contact de l'ordre de n en certains points, les équations*

$$\varphi = 0 \quad et \quad \mathrm{A}\varphi + \mathrm{B}\psi^{n+1} = 0$$

représenteront deux courbes qui auront un contact de l'ordre $(m+1)(n+1) - 1$ en chacun de ces points.

En effet, les deux courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, ayant un contact de l'ordre n, la seconde équation $\psi = 0$, d'après le théorème que nous venons de démontrer, pourra prendre la forme

$$A'\varphi + B'\pi^{n+1} = 0,$$

π étant une fonction de x et y, et A', B' des constantes ou des fonctions de x et y indifféremment.

L'équation $A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$, deviendra donc

$$A\varphi + B(A'\varphi + B'\pi^{n+1})^{m+1} = 0.$$

Dans le développement du binome $(B'\pi^{n+1} + A'\varphi)$ élevé à la puissance $(m+1)$, le premier terme sera $B'^{m+1}.\pi^{(n+1)(m+1)}$, et tous les autres contiendront en facteur la fonction φ élevée aux puissances $1, 2, \ldots, (m+1)$; le résultat sera donc de la forme

$$B'^{m+1}\pi^{(n+1)(m+1)} + a'\varphi.$$

De sorte que l'équation de la seconde courbe est de la forme

$$A\varphi + B[a'\varphi + B'^{m+1}\pi^{(n+1)(m+1)}] = 0,$$
$$(A + Ba')\varphi + B.B'^{m+1}.\pi^{(n+1)(m+1)} = 0,$$

ou enfin,

$$a\varphi + b\pi^{(n+1)(m+1)} = 0,$$

Or, d'après le premier théorème, la courbe représentée par cette équation a un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$, avec la courbe $\varphi = 0$, en chacun des points d'intersection des deux courbes $\varphi = 0$ et $\pi = 0$; mais ces points se trouvent aussi sur la courbe $\psi = 0$, puisque l'on a $\psi = A'\varphi + B'\pi^{n+1}$, ce qui prouve que les coordonnées tirées des deux équations $\varphi = 0$, $\pi = 0$ satisfont à l'équation $\psi = 0$; nous pouvons donc dire que le contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$ des deux courbes proposées a lieu aux points d'intersection des deux courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de vérifier, comme pour le premier théorème, que les $(m+1)(n-1)-1$ premiers coefficients différentiels des deux courbes sont égaux un à un; car les équations qui donneront ceux de la première courbe seront

$$d\varphi = 0, \quad d^2\varphi = 0, \quad d^3\varphi = 0, \ldots \; d^{(m+1)(n+1)-1}\varphi = 0.$$

Quant à celles qui donneront ceux de la seconde courbe qui a pour équation $A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$, si l'on observe que les deux courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ ayant un contact de l'ordre n en quelques-uns de leurs points d'intersection, on a ensemble les équations $\varphi = 0$, $d\varphi = 0$, $d^2\varphi = 0, \ldots d^{n+1}\varphi = 0$, et $d\psi = 0$, $d^2\psi = 0, \ldots d^{n+1}\psi = 0$ pour chacun de ces points, on reconnaît aisément qu'en vertu de ces équations, celles qui donnent les $(m+1)(n+1) - 1$ coefficients différentiels de la seconde courbe se réduisent précisément à $d\varphi = 0$, $d^2\varphi = 0$, $d^3\varphi = 0, \ldots d^{(m+1)(n+1)-1}\varphi = 0$, comme pour la première courbe. Ce qui prouve que les deux courbes auront leurs..... $(m+1)(n+1) - 1$ premiers coefficients différentiels égaux un à un respectivement.

Des surfaces courbes. Deux surfaces ont un contact de l'ordre m suivant une courbe, quand toute surface menée par un point de cette courbe les coupe suivant deux courbes qui ont, en ce point, un contact de l'ordre m, c'est-à-dire qui ont m éléments consécutifs communs. Les deux surfaces auront donc m zones communes, et, par conséquent, passeront par $(m+1)$ courbes infiniment voisines entre lesquelles, deux à deux, sont comprises ces m zones.

L'expression analytique de ces considérations géométriques, c'est que les coefficients différentiels $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \ldots\ldots\ldots$ jusques et y compris ceux de l'ordre m, de la première surface, soient égaux respectivement à ceux de la seconde, pour chaque point de la courbe de contact.

Cherchons quelle doit être la forme des équations des deux surfaces. Si de l'équation de la première on tire la valeur de l'abscisse x, et qu'on la mette dans celle de la seconde, on aura une équation en y et z qui donnera les projections des courbes d'intersection des deux surfaces, et qui pourra se décomposer en autant de facteurs qu'il y a de ces courbes distinctes. Or, les deux surfaces passant par $(m+1)$ courbes infiniment voisines qui, dans la réalité, se confondent, il devra y avoir $(m+1)$ facteurs égaux qui représenteront ces $(m+1)$ courbes; l'équation en y, z sera donc de la forme

$$f(y, z).[F(y, z)]^{m+1} = 0.$$

L'équation $F(y, z) = o$ représente la projection de la courbe, ou des courbes suivant lesquelles les deux surfaces ont un contact de l'ordre m, et l'équation $f(y, z) = o$ correspond aux autres courbes d'intersection des deux surfaces.

D'après cela, l'équation de la première surface étant

$$\varphi(x, y, z) = o,$$

celle de la seconde sera de la forme

$$A\varphi(x, y, z) + B[\psi(x, y, z)]^{m+1} = o;$$

A et B pouvant être des fonctions de x, y et z, ou simplement des constantes. Et les équations de la courbe de contact seront

$$\varphi(x, y, z) = o \quad \text{et} \quad \psi(x, y, z) = o.$$

Ainsi nous poserons ce théorème :

3^e^ **Théorème**. *Les deux équations*

$$\varphi = o, \quad et \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = o,$$

où A, B, φ *et* ψ *sont des fonctions de* x, y, z, *représentent deux surfaces qui ont un contact de l'ordre* m *suivant toute l'étendue de la courbe d'intersection des deux surfaces* $\varphi = o$ *et* $\psi = o$.

Et réciproquement, *deux surfaces qui ont un contact de l'ordre* m *suivant une courbe, peuvent être représentées par ces deux équations.*

Il serait facile de vérifier, comme nous l'avons fait pour les courbes, que les deux équations

$$\varphi = o \quad \text{et} \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = o$$

satisfont à la condition que les coefficients différentiels

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2x}{dy^2}, \ldots \frac{d^mz}{dx^m}, \frac{d^mz}{dx^{m-1}dy}, \ldots \frac{d^mz}{dy^m},$$

tirés de la première, sont égaux respectivement à ceux tirés de la seconde, pour tous les points qui satisfont aux deux équations.... $\varphi = o$ et $\psi = o$.

4ᵉ Théorème. *Lorsque deux surfaces ont un contact de l'ordre m suivant une courbe, toute surface qui aura avec cette courbe, en un point, un contact de l'ordre n, coupera les deux surfaces suivant deux courbes qui auront en ce point un contact de l'ordre....* $(m+1)(n+1)-1$.

La démonstration de ce théorème se déduit facilement de ce qui précède.

En effet, les deux surfaces peuvent être représentées par les deux équations

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad A\varphi + A\psi^{m+1} = 0;$$

leur contact a lieu suivant la courbe dont les équations sont $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface coupante; si l'on en tire la valeur de x et qu'on la mette dans les équations des deux surfaces proposées, on aura les équations des projections sur le plan des yz, des courbes d'intersection de ces deux surfaces par la surface coupante; ces équations seront de la forme

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{et} \quad A_1\varphi_1 + B_1\psi_1^{m+1} = 0,$$

où

$$\varphi_1, \ \psi_1, \ A_1 \ \text{et} \ B_1 \ \text{sont des fonctions de} \ y \ \text{et} \ z.$$

Or les équations $\varphi_1 = 0$ et $\psi_1 = 0$ sont celles des projections des sections des deux surfaces $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ par la surface coupante; et ces projections doivent avoir entre elles un contact de l'ordre n en un point, car les deux sections dont elles sont les projections ont elles-mêmes un contact de l'ordre n en un point de la courbe d'intersection des deux surfaces $\varphi = 0$, $\psi = 0$, puisque la surface coupante a en ce point un contact de l'ordre n avec cette courbe. Donc, d'après le deuxième théorème, les deux courbes

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_1\varphi_1 + B_1\psi_1^{m+1} = 0$$

ont un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$.

Ainsi les sections que la surface coupante fait dans les deux surfaces se projettent sur un plan quelconque suivant deux courbes qui ont un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$; donc ces deux sections ont elles-mêmes un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$. C. Q. F. D.

Ce beau théorème est dû à M. Ch. Dupin qui l'a démontré par la théorie générale des fonctions analytiques, dans ses *Développements de Géométrie*, p. 231.

On conclut de ce théorème, que

Quand deux surfaces ont un contact de l'ordre m suivant une courbe, toute ligne qui est tracée sur l'une d'elles et qui a avec cette courbe un contact de l'ordre n, a un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$ *avec la seconde surface.*

En effet, si par cette ligne on fait passer une surface quelconque, elle aura un contact de l'ordre n avec la courbe de contact des deux surfaces; conséquemment elle coupera ces deux surfaces suivant deux courbes qui auront un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$. La première de ces courbes sera la ligne tracée arbitrairement sur la surface; elle aura donc un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$ avec la seconde surface, puisqu'elle a un contact de cet ordre avec une ligne tracée sur cette surface.

Ainsi, quand un cône est circonscrit à une surface quelconque, toute courbe tracée sur cette surface, qui a un contact de l'ordre n avec la ligne de contact de cette surface et du cône, aura un contact de l'ordre $2n+1$ avec le cône.

Si donc, par cette courbe, on fait passer un cône qui ait le même sommet que le cône circonscrit à la surface, ces deux cônes auront, suivant leur arête commune, un contact de l'ordre $2n+1$; et toute surface les coupera suivant deux courbes qui auront un contact du même ordre. C'est ce qu'on peut exprimer par le théorème suivant :

Lorsqu'on fait la perspective d'une surface, si une courbe tracée sur elle a un contact de l'ordre n avec son contour apparent, cette courbe et ce contour auront, en perspective, un contact de l'ordre $2n+1$.

Supposons que les deux surfaces

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = 0,$$

qui ont un contact de l'ordre m suivant la courbe représentée par $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, soient toutes deux du second degré; la première équation $\varphi = 0$ sera du second degré; et il faudra, pour que la seconde $A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$ soit aussi du second degré, que A et B soient des constantes, et ψ une fonction linéaire de x, y et z; c'est-à-dire que $\psi = 0$ représente un plan; alors l'équation de la seconde surface sera

$$\varphi + a\psi^2 = 0.$$

Ce qui prouve d'abord que *deux surfaces du second degré ne peuvent avoir qu'un contact du premier ordre suivant toute l'étendue d'une courbe*, et ensuite que *cette courbe est nécessairement plane*.

Une troisième surface qui serait pareillement circonscrite à la première, aurait pour équation

$$\varphi + b\pi^2 = 0,$$

$\pi = 0$ étant l'équation du plan de la courbe de contact.

La courbe d'intersection de ces deux surfaces circonscrites à la première, se trouve sur la surface qui a pour équation

$$a\psi^2 - b\pi^2 = 0.$$

Il peut se présenter deux cas, celui où les coefficients a et b sont de même signe, et celui où ils sont de signes différents.

Dans le premier cas, l'équation ci-dessus prend la forme

$$(\sqrt{a}.\psi + \sqrt{b}.\pi)(\sqrt{a}.\psi - \sqrt{b}.\pi) = 0,$$

et donne les deux suivantes qui ont lieu séparément,

$$\sqrt{a}.\psi + \sqrt{b}.\pi = 0,$$
$$\sqrt{a}.\psi - \sqrt{b}.\pi = 0.$$

Ces équations représentent deux plans, sur lesquels se trouve l'intersection complète des deux surfaces. Ces plans passent par la droite d'intersection des plans des courbes de contact des deux surfaces avec la première. Car leurs équations sont satisfaites par les deux $\psi = 0$,

$\pi = 0$ qui sont celles de ces plans des courbes de contact

Ainsi, dans ce premier cas, si les deux surfaces circonscrites à la première se coupent, leur intersection se compose de deux courbes planes, c'est-à-dire de deux sections coniques, dont les plans passant par la droite d'intersection des plans de leurs courbes de contact avec la première surface.

Nous disons *si les deux surfaces se coupent*, car l'existence des deux plans que nous venons de trouver n'entraîne point nécessairement la réalité de l'intersection des deux surfaces. Ces deux plans représentent seulement une surface du deuxième degré qui satisfait aux conditions analytiques de passer par l'intersection complète des deux surfaces, soit que cette intersection soit réelle ou imaginaire. Ainsi les deux surfaces peuvent ne pas se couper quoique les deux plans existent.

Il faut observer que quand elles se coupent, leur intersection peut se réduire à une seule courbe plane; l'autre devenant imaginaire.

Maintenant examinons le cas où les deux coefficients a, b sont de signes différents. Alors l'équation

$$a\psi^2 - b\pi^2 = 0$$

ne peut être satisfaite que par les deux suivantes prises simultanément.

$$\psi = 0, \quad \pi = 0,$$

Ces deux équations représentent une ligne droite qui est l'intersection des plans des deux courbes de contact. L'intersection des deux surfaces est donc tout entière sur cette ligne droite: ce qui prouve que cette intersection se réduit à deux points qui sont ceux où la droite rencontre la surface à laquelle elles sont circonscrites.

Cette ligne droite représente une surface du second degré dont deux des trois axes principaux sont nuls, et qui satisfait à la condition algébrique de passer par l'intersection complète des deux surfaces circonscrites à la première.

Concevons, par exemple, une surface quelconque du second degré S, et deux courbes planes tracées sur elle et se coupant en deux points

a, b. Que l'une de ces deux courbes soit une ellipse, et qu'on la prenne pour la courbe de contact d'un ellipsoïde A *inscrit* dans la surface S; et que suivant la seconde courbe on *circonscrive* à la même surface S une autre surface B, ellipsoïde ou hyperboloïde. Cette surface B et l'ellipsoïde A n'auront évidemment d'autres points communs que les deux points a, b où se coupent leurs lignes de contact avec la première surface S. Et dans ce cas les deux plans que nous avons trouvés précédemment ne peuvent exister; car s'ils existaient ils passeraient par la droite ab, et conséquemment chacun d'eux couperait les deux surfaces suivant deux courbes différentes, ce qui n'est pas pas possible, puisqu'ils doivent faire la même section dans les deux surfaces.

Ainsi, dans le cas que nous considérons, la ligne droite ab représente une des surfaces du second degré, en nombre infini, qu'on peut faire passer par l'intersection complète des deux surfaces A, B; et aucune de ces surfaces ne peut plus être, comme dans le cas précédent, l'ensemble de deux plans.

Observons que la droite ab, qui est l'intersection des plans de contact des deux surfaces A, B avec la surface S, peut ne pas rencontrer cette dernière; alors les deux points a, b, sont imaginaires; et l'intersection des deux surfaces A, B est entièrement imaginaire.

Des considérations précédentes, nous conclurons ce théorème :

Quand deux surfaces du second degré sont inscrites ou circonscrites à une même surface du même degré, leur intersection complète est l'ensemble de deux courbes planes, ou bien se réduit à deux points;

Dans le premier cas, une des deux courbes, ou toutes les deux, peuvent être imaginaires, quoique leurs plans sont tous deux réels;

Dans le second cas, les deux points sont tous deux réels ou tous deux imaginaires.

La première partie de ce théorème est due à Monge qui l'a énoncée ainsi : *Lorsque deux surfaces quelconques du second degré sont circonscrites à une même troisième surface du second degré, elles se coupent* *toujours dans le système de deux courbes planes du second degré* (*). Depuis on l'a reproduite sous le même énoncé, en remarquant seulement que les deux courbes peuvent être imaginaires, bien que les deux plans soient réels. Mais on voit par la discussion dans laquelle nous venons d'entrer, que cette restriction ne suffit pas pour donner au théorème un énoncé complet et rigoureusement exact. Il aurait fallu ajouter encore, pour conserver l'énoncé de Monge, que les deux plans peuvent aussi devenir imaginaires, comme les deux courbes elles-mêmes, et n'avoir de réel que leur droite d'intersection, qui alors représente, à elle seule, une surface satisfaisant aux conditions analytiques de passer par l'intersection complète des deux proposées.

(*) *Correspondance de l'École Polytechnique*, t. II, p. 321, et t. III, p. 299.