JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

BINET

Observations sur des théorèmes de Géométrie, énoncés page 160 de ce volume et page 222 du volume précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 248-252.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__248_0>

Observations sur des théorèmes de Géométrie, énoncés page 160 de ce volume et page 222 du volume précédent;

PAR M. BINET,

Professeur au Collége de France.

Je viens de lire dans les livraisons d'avril et de mai un Mémoire fort intéressant de M. Lamé, sur les surfaces isothermes, dans les corps solides homogènes en équilibre de température. Ce mémoire fait partie d'un volume du *Recueil des Savans étrangers* (*), mais je n'avais pas eu occasion de le voir et d'y remarquer l'emploi que fait M. Lamé d'un théorème de Géométrie que j'ai publié en 1811. Je vais en reproduire l'énoncé tel qu'on le trouve dans un mémoire sur les axes principaux et les moments d'inertie des corps, qui fait partie du 16^e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique.* Pour faire comprendre cet énoncé, il convient de rappeler qu'une surface du second degré étant donnée, si l'on détermine les foyers de ses sections principales, une infinité de surfaces du même ordre, de même espèce ou d'espèces différentes, peuvent avoir les mêmes foyers pour leurs sections principales : ce sont les surfaces auxquelles M. Lamé donne le nom, fort convenable, de *surfaces homofocales.* Ces surfaces qui se sont présentées aux géomètres, en premier lieu, dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes elliptiques sur un point extérieur, jouissent de belles et utiles propriétés. Voici celle dont il s'agit : « les surfaces du second degré ayant les mêmes foyers pour leurs sections principales doivent respectivement se couper, de ma-

(*) Ce volume n'a pas encore paru. Le mémoire de M. Lamé n'était connu jusqu'ici des géomètres que par un petit nombre d'exemplaires particuliers ; en le publiant dans ce journal, je crois avoir rendu à la science un véritable service. La réclamation très fondée de M. Binet n'ôte rien au mérite du travail de M. Lamé, qui me semble, je le répète, ouvrir une route nouvelle dans le calcul des équations différentielles partielles. J. LIOUVILLE.

nière que le système de tous les hyperboloïdes à une nappe, coupe un quelconque des ellipsoïdes suivant les lignes de l'une de ses courbures; le système des hyperboloïdes à deux nappes coupe le même ellipsoïde selon le second système de ses lignes de courbure, et ces propriétés sont d'ailleurs réciproques. De là il suit que tout l'espace sera divisé par les surfaces que nous avons considérées (les surfaces homofocales) en une infinité de parallélépipèdes rectangles infiniment petits, dont les arêtes seront les éléments des lignes de courbure communes aux surfaces; et les axes principaux du corps répondant au sommet de l'un de ces parallélépipèdes seront les tangentes aux trois lignes de courbure communes des trois surfaces du second ordre qui y passent. » (Page 59 du XVI^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*)

A cette citation, j'ajouterai celle de l'énoncé du même théorème qui se trouve dans le rapport que MM. Laplace et Biot firent sur le mémoire relatif aux moments d'inertie et aux axes principaux des corps: ce rapport fut imprimé dans *le Moniteur* (n° du 4 juillet 1811), et là se trouve une date authentique et une publication réelle : « Les surfaces dont nous venons de parler (ellipsoïdes » hyperboloïdes à une et à deux nappes) prendront divers pé- » rimètres, et conserveront toutefois les mêmes excentricités pour » leurs sections principales. M. Binet remarque de plus qu'elles » se couperont à angles droits, et suivant leurs lignes de cour- » bure, ce qui donne une construction de ces lignes aussi simple » qu'élégante pour les surfaces du second ordre, au moyen de cette » pénétration. Si l'on considère un point quelconque de leurs intersec- » tions, les axes principaux qui y répondent sont les tangentes à ces » mêmes lignes de courbure, etc. » Ce rapport avait été lu à l'Institut le 24 juin 1811, en présence de Monge, à qui l'on doit les premières recherches sur les lignes de courbure, ainsi que la détermination de ces lignes pour les surfaces du second degré : pour Monge ce théorème était nouveau. D'illustres géomètres, Lagrange, Laplace, Legendre, Poisson assistaient à cette séance.

Il est juste de reconnaître que de son côté, M. Dupin, dans des recherches curieuses sur les surfaces orthogonales, a rencontré la même propriété des surfaces du second degré homofocales, comme application d'un théorème plus général Mais la date de publication des mémoires de M. Dupin est postérieure de deux années à celle du mien, quoique ses recherches sur ce sujet, d'après son assertion, remontent à une époque antérieure à 1811. Le théorème de M. Dupin semble aussi n'être pas parvenu à la connaissance de M. Lamé, car dans son mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré, il eût pu partir, comme d'un résultat connu, de ce théorème général, savoir, que « trois systèmes de surfaces orthogonales conjuguées sont toujours » tels que deux quelconques d'entre eux tracent sur une surface du » troisième toutes ses lignes de courbure. » (Page 226 du XXIII^e cahier du *Journal de l'Éoole Polytechnique.*) Cette belle proposition de Géométrie est précisément le théorème de M. Dupin.

La forme sous laquelle j'ai considéré l'équation des surfaces homofocales est

$$\frac{a^2}{K-A} + \frac{b^2}{K-B} + \frac{c^2}{K-C} = 1\,;$$

a, b, c sont les coordonnées d'un point quelconque de la surface, A, B, C trois constantes positives telles que $A > B > C$, et K une quantité susceptible de toutes les grandeurs supérieures à C : ce qui donne lieu aux trois espèces principales de surfaces du second degré.

De trois formules semblables à la précédente, répondant à trois valeurs différentes de K, M. Lamé déduit les coordonnées a, b, c en fonction des trois valeurs attribuées à K, ou à des quantités μ^2, ν^2, ρ^2 qui remplissent l'office de notre quantité K. J'ai aussi remarqué, il y a beaucoup d'années, et à propos du même sujet, l'expression simple de ces coordonnées; mais j'étendis alors mes recherches à la détermination d'un nombre quelconque de grandeurs a^2, b^2, c^2, etc., entre un pareil nombre d'équations de la forme précédente. Je rapporterai ici le résultat que je trouvai, parce qu'il peut servir en d'autres circonstances; j'y joindrai la démonstration qui me l'a fourni. Pour plus de simplicité, j'écris a, b, c, etc., à la place de a^2, b^2, c^2, etc.

Prenons donc un nombre n d'équations de la forme

$$(n)\qquad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{a}{K-A} + \dfrac{b}{K-\;} + \dfrac{c}{K-C} + \text{etc.} = 1,\\[2ex]
\dfrac{a}{K_1-A} + \dfrac{b}{K_1-B} + \dfrac{c}{K_1-C} + \text{etc.} = 1,\\[2ex]
\dfrac{a}{K_2-A} + \dfrac{b}{K_2-B} + \dfrac{c}{K_2-C} + \text{etc.} = 1,\\[1ex]
\quad\text{etc.}
\end{array}\right.$$

Nous nous proposons de former l'expression des n inconnues a, b, c, etc., déterminées par ces équations. L'on y parviendra par les considérations suivantes :

Soit $F(x) = (x-A)\,(x-B)\,(x-C)\ldots\ldots$ une fonction entière du degré n marqué par le nombre de ses facteurs $x-A$, $x-B$, etc., et $f(x)$ une autre fonction entière dont le degré ne surpasse pas $n-1$; la fraction $\frac{fx}{Fx}$ sera décomposable en n fractions simples qui auront les dénominateurs $x-A$, $x-B$, etc. ; et l'on sait que si $F'(x)$ désigne le coefficient différentiel $\frac{dFx}{dx}$, on a, par la formule d'Euler,

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{fA}{(x-A)F'A} + \frac{fB}{(x-B)F'B} + \frac{fC}{(x-C)F'C} + \text{etc.}$$

Dans cette formule identique, écrivons successivement $K, K_1, K_2\ldots$ à la place de x, nous composerons ainsi n équations de la forme

$$(\mathrm{N})\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{K-A} + \frac{b}{K-B} + \frac{c}{K-C} + \text{etc.} = \frac{f(K)}{F(K)}, \\ \frac{a}{K_1-A} + \frac{b}{K_1-B} + \frac{c}{K_1-C} + \text{etc.} = \frac{f(K_1)}{F(K_1)}, \\ \frac{a}{K_2-A} + \frac{b}{K_2-B} + \frac{c}{K_2-C} + \text{etc.} = \frac{f(K_2)}{F(K_2)}, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

et ces équations seront évidemment satisfaites en prenant pour a, b, c, etc., les valeurs

$$\begin{array}{l} a = \frac{f(A)}{F'(A)} = \frac{f(A)}{(A-B)\,(A-C)\,(A-D)\ldots} \\ b = \frac{f(B)}{F'(B)} = \frac{f(B)}{(B-A)\,(B-C)\,(B-D)\ldots}, \\ \text{etc.} \end{array}$$

Pour obtenir des équations entièrement semblables à celles que nous nous sommes proposé de résoudre, nous composerons une fonction $\mathrm{f}(x)$ du degré n avec les facteurs inégaux

$$(x-K)\,(x-K_1)\,(x-K_2)\ \text{etc.}$$

Si l'on prend pour le polynome du degré $n-1$, que nous avons désigné par $f(x)$, la différence $F(x) - \mathrm{f}(x)$ des deux polynomes du degré n qui ont le même premier terme, alors le second membre de la première des équations ci-dessus $\frac{f(K)}{F(K)}$ deviendra $\frac{F(K)-f(K)}{F(K)}=1$, parce que $f(K)=0$; il en sera ainsi des autres quantités $\frac{f(K_1)}{F(K_1)}$, $\frac{f(K_2)}{F(K_2)}$, etc., et les équations (N) prendront la forme proposée (n).

Les valeurs de a, b, c, etc., qui satisfont à n équations de la forme

$$(n) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{K-A} + \frac{b}{K-B} + \frac{c}{K-C} + \text{etc.} = 1, \\ \frac{a}{K_1-A} + \frac{b}{K_1-B} + \frac{c}{K_1-C} + \text{etc.} = 1, \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

seront $$a = \frac{F(A)-f(A)}{F'(A)} = -\frac{f(A)}{F'(A)},\quad b = -\frac{f(B)}{F'(B)},\ \text{etc.},$$

puisque $F(A) = 0$, $F(B) = 0$, etc.; ainsi l'on aura

$$a = -\frac{(A-K)\,(A-K_1)\,(A-K_2)\ldots}{(A-B)\,(A-C)\ldots}$$
$$b = -\frac{(B-K)\,(B-K_1)\,(B-K_2)\ldots}{(B-A)\,(B-C)\ldots\ldots},$$
$$c = \text{etc.}$$

Lorsque l'on veut appliquer ces formules aux surfaces du second degré homofocales qui se coupent, il suffit de remplacer a, b, c, par a^2, b^2, c^2, et de réduire à trois le nombre des équations.

Ces remarques se rapportent à un écrit déjà bien ancien; il a pu rester ignoré de géomètres qui, s'occupant de sujets différents par leur objet, ont pu rencontrer dans leurs recherches les mêmes propositions que moi. J'ajouterai que c'est dans le même mémoire que l'on a donné, pour la première fois, l'équation du troisième degré dont les racines sont les carrés des demi-axes d'une surface du second ordre, et que l'on a énoncé ce théorème cité par M. Saint-Guilhem, page 222 du premier volume de ce journal, savoir, que la somme des carrés des faces d'un parallélépipède conjugué circonscrit à un ellipsoïde, est une quantité constante pour tous les parallélépipèdes conjugués; proposition analogue à deux autres que l'on connaissait depuis quelques années, et qui avaient été publiées par M. Livet. (13e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*)