JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CORIOLIS

Mémoire sur le degré d'approximation qu'on obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant pour calculer ces valeurs diverses équations aux différences plus ou moins approchées

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 229-244.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__229_0>

MÉMOIRE

Sur le degré d'approximation qu'on obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant pour calculer ces valeurs diverses équations aux différences plus ou moins approchées ;

PAR G. CORIOLIS.

Lorsqu'on a à résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

on le fait au moyen de l'intégrale

$$y = \int f(x)dx.$$

Les valeurs numériques de cette dernière peuvent se calculer par approximation au moyen de l'équation aux différences

$$\Delta y = f(x)\Delta x:$$

c'est ce qu'on appelle la *méthode des quadratures*. Au lieu de cette équation aux différences, on emploie encore la suivante :

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{2}[f(x) + f(x + \Delta x)].$$

C'est pour cette formule que le célèbre Euler a donné les termes d'une série complémentaire, et que M. Poisson, dans un mémoire qui fait partie du recueil de l'Académie, année 1827, a exprimé le reste de cette série sous une forme analogue à celui de la série de Taylor.

M. Cauchy est, je crois, le premier qui ait fixé une limite à l'erreur commise lorsque, pour calculer les valeurs de y tiré de l'équation différentielle $dy = f(x, y)dx$, où les variables x et y paraissent toutes deux dans la fonction qui exprime la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on se sert de l'équation aux différences

$$\Delta y = f(x, y)\Delta x.$$

Nous allons d'abord exposer la marche qu'il a suivie, puis nous donnerons des limites analogues lorsqu'on emploie diverses autres équations aux différences plus ou moins approchées de l'équation différentielle.

Pour faciliter les énoncés, nous concevrons x et y comme étant deux coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan.

Nous ferons remarquer d'abord que toutes les méthodes d'approximation pour le calcul des valeurs numériques de y ne peuvent réussir, comme on le verra, par la recherche même des limites de l'erreur, qu'autant qu'on sait *à priori* que pour tous les points compris dans un certain rectangle sur le plan, ni la fonction $f(x, y)$, ni certaines de ses dérivées ne deviennent infinies, et qu'on peut assigner des nombres que ces fonctions ne dépassent jamais dans ce rectangle.

Soit donc A un nombre que $f(x, y)$ ne puisse dépasser dans le rectangle dont les points extrêmes ont pour coordonnées x_0, $x_0 + a$, $y_0 - b$, $y_0 + b$.

Supposons qu'après avoir pris $\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$, on calcule y_n au moyen des équations successives

$$\begin{aligned}
y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)\Delta x, \\
y_2 - y_1 &= f(x_1, y_1)\Delta x, \\
&\vdots \\
y_n - y_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x.
\end{aligned}$$

Il s'agit de reconnaître quelle altération recevait cette valeur de y_n, si, au lieu de diviser $x - x_0$ en n parties, on multipliait indéfiniment les éléments en sous-divisant chacun des accroissements Δx en m éléments $\Delta' x$ plus petits.

Soient y_r et y_{r+1}, deux quelconques des y successifs du calcul précédent, de telle sorte qu'on ait

$$y_{r+1} - y_r = f(x_r, y_r)\Delta x,$$

en sous-divisant Δx en m éléments $\Delta' x$ et conservant à x_r et à y_r les mêmes valeurs, on aura une nouvelle valeur de y_{r+1} répondant à x_{r+1} ou à $x_r + \Delta x$, laquelle résultera des équations successives

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_r + f(x_r, y_r)\Delta' x, \\ y'_2 &= y'_1 + f(x_r, y'_1)\Delta' x, \\ &\vdots \\ y_{r+1} &= y'_{m-1} + f(x'_{m-1}, y'_{m-1})\Delta' x, \end{aligned}$$

ou x'_1, x'_2, x'_3, etc...., désignant les valeurs de x intermédiaire entre x_{r+1} et x_r et y'_1, y'_2, y'_3, etc..., les valeurs de y fournies par ces équations aux différences. On peut les mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} y'_1 - y_r &= f(x_r, y_r)\Delta' x, \\ y'_2 - y_r &= f(x_r, y_r)\Delta' x + f(x'_1, y'_1)\Delta' x, \\ &\vdots \\ y_{r+1} - y_r &= f(x_r, y_r)\Delta' x + \ldots. + f(x'_{m-1}, y'_{m-1})\Delta' x. \end{aligned}$$

Tant que Δx ne dépassera pas $\frac{b}{A}$, c'est-à-dire que $A\Delta x < b$, on sera sûr que chacune des sommes qui forment les deuxièmes membres sera inférieure à $A\Delta x$, et qu'ainsi tous les y qui paraissent dans le calcul seront tous compris entre les limites $y_0 \pm A\Delta x$ ou $y_0 \pm b$. Ainsi, l'on peut poser

$$y_{r+1} = y_r + f(x_r + \theta\Delta x,\ y_r \pm \theta A\Delta x)\Delta x,$$

θ étant un nombre fractionnaire entre zéro et l'unité.

Si donc on désigne par δy_{r+1} la différence entre la valeur de y calculée par l'équation

$$y_{r+1} = y_r + f(x_r, y_r)\Delta x,$$

et celle qui résulte des m sous-divisions de Δx; on aura

$$\delta y_{r+1} = [f(x_r + \theta A \Delta x, y_r \pm \theta A \Delta x) - f(x_r, y_r)] \Delta x.$$

Si l'on désigne par P et Q les maxima numériques des dérivées partielles $\frac{df(x,y)}{dx}$ et $\frac{df(x,y)}{dy}$ dans l'étendue du rectangle dont nous avons parlé, et qu'on développe la différence ci-dessus au moyen des dérivées partielles, on aura toujours

$$\delta y_{r+1} < (P + AQ) \Delta x^2.$$

Il reste à examiner maintenant quelle sera l'altération partielle produite sur y_n par cette variation δy_{r+1}, en supposant que l'on ne change pas le mode de division entre y_{r+1} et y_n, et que cette dernière quantité ne soit ainsi modifiée que par le seul changement de y_{r+1}.

En désignant de même par δy_{r+2}, δy_{r+3}, etc., les variations correspondantes des quantités y_{r+2}, y_{r+3}, etc., on aura évidemment

$$\delta y_{r+2} = \delta y_{r+1} + [f(x_{r+1}, y_{r+1} + \delta y_{r+1}) - f(x_{r-1}, y_{r+1})] \Delta x.$$

Cette équation fournit l'inégalité suivante :

$$\delta y_{r+2} < \delta y_{r+1} (1 + Q\Delta x),$$

et comme on aura semblablement,

$$\delta y_{r+3} < \delta y_{r+2} (1 + Q\Delta x),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\delta y_n < \delta y_{n-1} (1 + Q\Delta x);$$

on en déduira

$$\delta y_n < \delta y_{r+1} (1 + Q\Delta x)^{n-r-1},$$

En appliquant cette formule au premier élément Δx à partir de x_0, sa sous-division produisant un changement δy_1 sur y_1, on aura pour la variation correspondante $\delta_1 y_n$ sur y_n

$$\delta_1 y_n < \delta y_1 (1 + Q\Delta x)^{n}{}_{-1}.$$

Si l'on sous-divise ensuite le second élément Δx, on produira sur y_n

un deuxième changement qui sera limité par l'inégalité

$$\delta_2 y_n < \delta y_2 (1 + Q\Delta x)^{n-2}.$$

On continuera à poser des relations semblables qui limiteront les altérations partielles

$$\delta_3 y_n, \quad \delta_4 y_n, \text{ etc.}$$

Il est clair que l'on aura le changement total sur y_n en faisant la somme

$$\delta_1 y_n + \delta_2 y_n + \delta_3 y_n + \text{etc.}$$

En la désignant par δy_n et se rappelant que toutes ces quantités $\delta_1 y_n$, $\delta_2 y_n$, etc., sont toutes inférieures à $(P + AQ)\Delta x^2$; on aura

$$\delta y_n < (P + AQ)\left[\frac{(1 + Q\Delta x)^n - 1}{Q}\right]\Delta x.$$

Cette inégalité subsistant, quel que soit le nombre des nouvelles sous-divisions de chacun des n éléments Δx en d'autres plus petits, elle aura encore lieu à la limite quand le nouvel y deviendra la valeur exacte ; ainsi elle donne une limite de l'erreur que l'on commet en prenant y_n au lieu de la limite.

La marche précédente, tout en donnant une limite pour l'erreur commise, a l'avantage de démontrer que y_n converge vers une limite lorsque n croît indéfiniment, et qu'il y a une fonction qui satisfait à l'équation différentielle : les valeurs de cette fonction peuvent ainsi se calculer par la méthode précédente avec telle approximation que l'on voudra.

Telle est l'analyse qu'on doit à M. Cauchy.

Nous remarquerons maintenant que si l'on admet *à priori* que la fonction y existe, la limite précédente peut être réduite à moitié. En effet, les valeurs de y répondant à x_{r+1} peuvent être mises sous la forme

$$y = y_r + f(x_r, y_r)\Delta x + \frac{\mathrm{d}f(x_r + \theta\Delta x,\; y_r \pm \theta A\Delta x)}{\mathrm{d}x}\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Or, la valeur approchée de y que nous désignerons par y_{r+1} est donnée par

$$y_{r+1} = y_r + f(x_r, y_r)\Delta x;$$

Ainsi, la seule sous-division à l'infini des éléments entre x_r et x_{r+1} fait varier y de

$$\frac{\mathrm{d}f(x_r + \mathrm{A}\Delta x,\ y_r \pm \theta\mathrm{A}\Delta x)}{\mathrm{d}x}\frac{\Delta x^2}{2},$$

qui est inférieure à

$$(\mathrm{P} + \mathrm{AQ})\frac{\Delta x^2}{2}.$$

C'est la moitié de ce qu'on avait adopté par la marche précédente ; on peut donc poser en général

$$\delta y_n < \left(\frac{\mathrm{P} + \mathrm{AQ}}{2}\right)\left[\frac{(1 + \mathrm{Q}\Delta x)^n - 1}{\mathrm{Q}}\right]\Delta x.$$

Il ne faut pas perdre de vue que ces calculs par éléments ne peuvent réussir et conduire ainsi aux valeurs numériques de l'intégrale y qu'autant qu'on peut assigner un certain rectangle dans lequel ni la fonction $f(x, y)$, ni les deux dérivées partielles ne deviennent infinies. Les coordonnées extrêmes de ce rectangle étant x_0, $x_0 + a$, $y_0 - b$ et $y_0 + b$, on n'est sûr *à priori* de pouvoir calculer y que pour une valeur de x qui ne dépasse pas $x_0 + \frac{b}{\mathrm{A}}$, puisque dans ce cas seulement on sait que quel que soit l'indice r la valeur numérique de $y_r - y_0$ étant plus petite que $\mathrm{A}(x_r - x_0)$ sera alors inférieure à b.

On peut remarquer que, si la fonction $f(x, y)$ reste positive pour toute la superficie du demi-rectangle compris entre y_0 et $y_0 + b$; alors on n'a pas besoin de considérer le demi-rectangle inférieur compris entre y_0 et $y_0 - b$ puisqu'on sera sûr alors que dans l'étendue du calcul les valeurs de y vont en croissant : ce sera l'inverse si $f(x, y)$ reste négative.

Examinons maintenant le cas où l'on emploie d'autres équations aux différences pour calculer les valeurs de y. On peut, par exemple, procéder d'une manière analogue à celle qu'on prend pour les intégrales définies, quand on leur substitue l'aire d'un polygone au lieu de la somme des rectangles inscrits. On emploie alors l'équation aux différences

$$\Delta y = [f(x, y) + f(x, y + f(x, y)\Delta x)]\frac{\Delta x}{2}.$$

Examinons dans ce cas quelle limite on peut assigner à l'erreur commise.

Lorsque y n'existe pas dans $f(x, y)$ et que cette fonction est réduite à $f(x)$, Euler a donné une série pour exprimer le complément nécessaire pour former la valeur de y. M. Poisson a exprimé le premier le reste de cette série et a posé ainsi une limite à l'erreur. Il s'est fondé sur l'analyse propre aux développements des fonctions en séries de sinus et de cosinus. Nous exprimerons ici le reste par le seul emploi de la série de Taylor.

Supposons d'abord qu'on ait une fonction $f(x)$ au lieu de $f(x, y)$ et que l'équation aux différences soit

$$\Delta y = [f(x) + f(x + \Delta x)] \frac{\Delta x}{2}.$$

En développant $f(x + \Delta x)$ et s'arrêtant au troisième terme, cette équation devient

$$\Delta y = \Delta x f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f'(x) + \frac{\Delta x^3}{4} f''(x + \theta \Delta x),$$

θ étant un coefficient numérique plus petit que l'unité. Mais la valeur exacte de Δy serait donnée par

$$\Delta y = \Delta x f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f'(x) + \frac{\Delta x^3}{6} f''(x + \theta \Delta x).$$

ainsi la différence entre les deux y pourra être mise sous la forme de

$$\frac{\Delta x^3}{3} f''(x + \theta \Delta x).$$

Si A'' désigne la plus grande valeur numérique de $f''(x)$ pour toutes les valeurs de $x + \theta \Delta x$ qui peuvent être employées, l'expression ci-dessus sera inférieure à

$$\frac{\Delta x^3}{12} A''.$$

Revenons maintenant à l'équation différentielle où les deux variables x et y entrent dans la fonction, et soit

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Nous déduirons y_{r+1} de y_r par l'équation aux différences

$$\Delta y = \{[f(x, y) + fx, y + f(x, y)\Delta x]\}\frac{\Delta x}{2};$$

posons, pour abréger,

$$y + f(x, y)\Delta x = y',$$

et désignons par Y la valeur exacte de y. Nous pourrons remplacer l'équation aux différences qui fournit les y, par la suivante

$$\Delta y = [f(x, y) + f(x, \mathrm{Y})]\frac{\Delta x}{2} - [f(x, \mathrm{Y}) - f(x, y')]\frac{\Delta x}{2}.$$

Le premier terme du deuxième membre de cette équation peut être considéré comme une fonction de x, ainsi par la formule qu'on vient de donner pour ce cas, la différence entre ce terme et ce qu'il devait être pour donner la valeur exacte Y est plus petite que

$$\frac{\Delta x^3}{12}\mathrm{A}''.$$

La quantité A″ étant la plus grande valeur numérique de la dérivée de $f(x, y)$ prise par rapport à x, en y regardant y comme une fonction de x. En désignant par R, S, T les plus grandes valeurs numériques des trois dérivées partielles du deuxième ordre de $f(x, y)$; on aura

$$\mathrm{A}'' < \mathrm{R} + 2\mathrm{SA} + \mathrm{TA}^2 + \mathrm{Q}(\mathrm{P} + \mathrm{AQ}).$$

Cherchons maintenant une limite du deuxième terme de l'équation ci-dessus, c'est-à-dire une limite de

$$-[f(x, \mathrm{Y}) - f(x, y')]\frac{\Delta x}{2}.$$

Lorsqu'on veut passer de x à $x + \Delta x$, on a

$$\mathrm{Y} = y + f(x, y)\Delta x + f'(x + \theta\Delta x, y \pm \theta\mathrm{A}\Delta x)\frac{\Delta x^2}{2};$$

de plus, d'après la définition de y', on a

$$y' = y + f(x, y)\Delta x,$$

Ainsi,

$$Y = y' + f'(x + \theta\Delta x,\ y \pm \theta A\Delta x)\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Introduisant cette valeur de Y dans $f(x,\ Y) - f(x,y')$, et remplaçant cette différence par une valeur moyenne de la dérivée partielle qui lui correspond, c'est-à-dire, la développant par la formule de Taylor arrêtée à la première dérivée; on aura

$$-\frac{\Delta x^3}{4}\frac{df[x,\ y + \theta f'(x + \theta\Delta x,\ y \pm \theta A\Delta x)]}{dy}f'(x + \theta\Delta x,\ y \pm \theta A\Delta x).$$

Ayant désigné par P et Q les plus grandes valeurs numériques des dérivées partielles $\frac{df(x,\ y)}{dx}$ et $\frac{df(x,\ y)}{dy}$ pour toutes les valeurs de x et de y qui peuvent être employées dans le calcul, l'expression ci-dessus, en faisant abstraction du signe, sera inférieure numériquement à

$$\frac{\Delta x^3}{4}(P + AQ)Q.$$

Ainsi, dans le cas le plus défavorable, où le signe des deux parties que nous venons de calculer serait le même, la limite de l'erreur totale commise sur un y_{r+1} quelconque, sera donnée par

$$\delta y_{r+1} < \frac{\Delta x^3}{4}\left[\frac{A''}{3} + (P + AQ)Q\right].$$

Maintenant, il reste à voir quelle influence a l'erreur δy_{r+1} sur y_n quand on sous-divise les éléments Δx.

Comme on a

$$y_{r+2} = y_{r+1} + \frac{\Delta x}{2}\left\{f(x_{r+1},\ y_{r+1}) + f[x_{r+1},\ y_{r+1} + \Delta x f(x_{r+1},\ y_{r+1})]\right\},$$

on en déduit

$$\delta y_{r+2} < \delta y_{r+1} + \frac{\Delta x}{2}[Q\delta y_{r+1} + Q(\delta y_{r+1} + \Delta x Q\delta y_{r+1})],$$

ou bien,

$$\delta y_{r+2} < \delta y_{r+1}\left(1 + Q\Delta x + Q^2\frac{\Delta x^2}{2}\right);$$

on aura de même

$$\delta y_{r+3} < \delta y_{r+2}\left(1 + Q\Delta x + \frac{Q^2\Delta x^2}{2}\right),$$

et ainsi de suite.

En multipliant ces inégalités l'une par l'autre, on aura

$$\delta_{r+1} y_n < \delta y_{r+1} \left(1 + Q\Delta x + Q^2 \frac{\Delta x^2}{2}\right)^{n-r-1};$$

l'erreur totale sur y_n est la somme de tous les $\delta_{r+1} y_n$ résultant des changements produits par les sous-divisions des Δx ; et comme on a toujours, quel que soit l'indice r,

$$\delta y_{r+1} < \frac{\Delta x^3}{4}\left[\frac{A''}{3} + Q(P + AQ)\right];$$

on aura pour l'erreur totale sur y_n

$$\delta y < \frac{\Delta x^2}{4}\left[\frac{A''}{8} + (P + AQ)\, Q\right]\left[\frac{\left(1 + Q\Delta x + Q^2 \frac{\Delta x^2}{2}\right)^n - 1}{Q + Q^2 \frac{\Delta x}{2}}\right].$$

A'' étant limité dans cette formule par

$$A'' < R + 2SA + TA^2 + (P + AQ)\, Q.$$

Le dernier facteur qui entre dans la limite de δy_n prend une valeur finie pour Δx infiniment petit et n infiniment grand ; ainsi l'erreur est de l'ordre de Δx^2.

Eu égard aux signes des différences qui ont introduit A'' et ...... $Q(P + AQ)$, on peut remarquer que si la fonction $f(x, y)$ et ses dérivées du premier et du deuxième ordre étaient de même signe dans l'étendue du rectangle dont nous avons parlé, alors on pourrait dans l'expression ci-dessus remplacer le facteur

$$\frac{A''}{3} + (P + AQ)Q \text{ par } \frac{A''}{3} - (P + AQ)Q,$$

ou par

$$R + 2AS + A^2T - \frac{2}{3} Q(P + AQ).$$

On peut donner également la limite de l'erreur commise lorsqu on emploie une équation aux différences formée d'un certain nombre de termes de la série de Taylor.

Ainsi, en partant de

$$\Delta y = f(x,y)\,\Delta x + \frac{\mathrm{d}f(x,y)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\Delta x^2}{2} + \ldots \frac{d^m f'(x,y)}{\mathrm{d}x^m}\,\frac{\Delta x^m}{1.2.3\ldots m},$$

l'erreur commise sur $y+\Delta y$, répondant à $x+\Delta x$, sera moindre que la plus grande valeur de

$$\frac{d^{m+1} f(x+\theta\Delta x, y\pm\theta A\Delta x)}{\mathrm{d}x^{m+1}} \cdot \frac{\Delta x^{m+1}}{1.2.3..(m+1)}.$$

En désignant par $A^{(m+1)}$ la plus grande valeur de la dérivée totale qui forme le premier facteur de cette expression, et par δy l'erreur sur $y+\Delta y$, on aura

$$\delta y < A^{(m+1)}\,\frac{1.2.3\ldots(m+1)}{\Delta x^{m+1}}.$$

L'altération de y_{r+1}, résultant seulement de celle de y_r, sera donnée par

$$\delta y_{r+1} = \delta y_r + \frac{\mathrm{d}f(x_r, y_r \pm \theta\delta y_r)}{\mathrm{d}y}\,\delta y_r \Delta x + \ldots \frac{\mathrm{d}^{m+1} f(x_r, y_r + \theta\delta y_r)}{\mathrm{d}x^m\,\mathrm{d}y}\,\frac{\delta y_r\,\Delta x^m}{1.2\ldots m}.$$

Si, pour abréger, on pose en général la dérivée totale.... $\frac{\mathrm{d}^m f(x,y)}{\mathrm{d}x^m} = a^{(m)}$; on aura

$$\delta y_{r+1} = \delta y_r\left(1 + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y}\,\Delta x + \ldots \frac{\mathrm{d}a^{(m)}}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}\right),$$

y devant avoir une valeur entre y_r et $y_r + \delta y_r$, dans les expressions $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y} \ldots\ldots \frac{\mathrm{d}a^{(m)}}{\mathrm{d}y}$.

En procédant comme dans le cas précédent, et désignant les plus grandes valeurs numériques des dérivées $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y} \ldots\ldots \frac{\mathrm{d}a^{(m)}}{\mathrm{d}y}$, quel que soit y dans l'intérieur du rectangle, par

$$Q,\ A_1,\ A_1'',\ \ldots\ldots\ A_1^{(m)},$$

on trouvera que l'erreur sur y_n, résultant du seul changement δy_r sur y_r sera limité par

$$\delta_r y_n < \delta y_r \left(1 + Q\Delta x + A_1''\,\frac{\Delta x'}{2} + \ldots + A_1^{(m)}\,\frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}\right)^{n-r},$$

comme toutes les quantités δy_r sont limitées par

$$\delta y_r < A^{(m+1)} \frac{\Delta x^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)},$$

et qu'en outre l'erreur totale δy_n de y_n est donnée par

$$\delta y_n = \delta_1 y_n + \delta_2 y_n + \delta_3 y_n \ldots \delta_n y_n,$$

on aura

$$\delta y_n < \frac{\Delta x^m A^{(m+1)}}{1.2.3\ldots(m+1)} \left[\frac{\left(1 + Q\Delta x + \ldots A_1^{(m)} \frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}\right)^n - 1}{Q + A'_1 \frac{\Delta x}{2} \ldots + A_1^{(m)} \frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}} \right];$$

le dernier facteur du deuxième membre étant fini quand n devient infini, la limite de l'erreur est de l'ordre de Δx^m.

Lorsque n devient très grand, et par conséquent lorsque Δx devient très petit devant l'intervalle total $x_n - x_0$, on peut poser

$$\delta y_n < \frac{\Delta x^m}{1.2.3\ldots m+1}(m+1)\left(\frac{e^{Qn\Delta x} - 1}{Q}\right);$$

Examinons encore ce que devient la limite de l'erreur quand on emploie pour équation aux différences l'intégrale d'une équation différentielle linéaire très approchée de l'équation différentielle du problème.

Suivant que ce sera la variable x ou la variable y qui, par la nature de la question, variera le moins rapidement en développant $f(x, y)$ à partir de x_0 et y_0 suivant les puissances des accroissements de x ou de y, on développera $f(x, y)$ suivant les puissances de l'accroissement de x ou de y.

Soit donc, pour fixer les idées, y la variable qu'on sait, par la nature de la question, devoir varier le moins rapidement; on posera $y = y_0 + \eta$, et l'on remplacera l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

par l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = f(x, y_0) + \frac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}y}\eta.$$

Nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$f(x, y) = a,$$
$$\frac{\mathrm{d}f(x, y)}{\mathrm{d}y} = q.$$

a et q étant ici des fonctions de x. L'intégrale de l'équation linéaire ci-dessus sera

$$\eta = e^{\int q\,\mathrm{d}x}\int e^{-\int q\,\mathrm{d}x} a\,dx,$$

En se servant de cette équation comme d'une équation aux différences, on posera

$$\Delta y = e^{\int q\,\mathrm{d}x}\int e^{-\int q\,\mathrm{d}x} a\,dx.$$

On peut encore écrire cette équation sous la forme

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q\,\mathrm{d}x} a\,dx.$$

x_{r+1} étant ici égal à $x_r + \Delta x$.

Pour avoir une limite de la différence entre cette valeur de y_{r+1} et celle qui est exacte, on remarquera que cette valeur exacte peut être considérée comme fournie par l'intégrale de l'équation différentielle,

$$\frac{dy}{dx} = a + q\eta + \frac{\mathrm{d}^2 f(x, y \pm \theta A \Delta x)}{\mathrm{d}y^2}\frac{\eta^2}{2},$$

en sorte que la différence entre les deux y_{r+1} sera

$$\delta y_{r+1} = \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q\,\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^2 f(x, y \pm \theta A \Delta x)}{\mathrm{d}y^2}\frac{\eta^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Si T désigne la valeur maximum de $\frac{d^2f(x, y)}{dy^2}$ dans toute l'étendue du rectangle que nous avons déjà considéré; on aura, en vertu de ce que l'accroissement η de y est petit que $A\Delta x$,

$$\delta y_{r+1} < \frac{\Delta x^2}{2} A^2 T \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} dx\,;$$

or, quel que soit le signe de q, on a

$$e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} < e^{Q(x_{r+1}-x)} < e^{Q\Delta x},$$

et

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{Q\Delta x} dx = e^{Q\Delta x} \Delta x,$$

ainsi on a

$$y_{r+1} < \frac{\Delta x^3}{2} A^2 T e^{Q\Delta x}$$

Toutes les erreurs δy_1, δy_2, δy_3, etc., provenant de la même cause seront inférieures à cette même limite.

Il reste maintenant à examiner comment une erreur δy_r influe sur y_{r+1} tel qu'il a été déterminé par l'équation aux différences

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} a dx.$$

On tire de cette équation,

$$\delta y_{r+1} = \delta y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} \frac{da}{dy_r} \delta y_r\, e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} dx + \int_{x_r}^{x_{r+1}} a \frac{de^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx}}{dy_r} \delta y_r dx\,;$$

les dérivées, par rapport à y_r devant prendre dans cette formule des valeurs moyennes parmi celles qui répondent aux points compris dans le rectangle. En remarquant qu'on a

$$\frac{de^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx}}{dy_r} = - e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} \int_x^{x_{r+1}} \frac{dq}{dy_r},$$

et en désignant par T, comme précédemment, la plus grande valeur numérique de $\frac{dq}{dy_r}$; il viendra en conservant aux lettres A et Q leurs significations précédentes

$$\delta y_{r+1} < \delta y_r (1 + Qe^{Q\Delta x}\Delta x + ATe^{Q\Delta x}\Delta x).$$

De toutes les inégalités semblables, on conclut

$$\delta_r y_n < \delta y_r [1 + Qe^{Q\Delta x}(Q + AT)\Delta x]^{n-r}.$$

En se rappelant que l'on a toujours,

$$\delta y_r < \frac{\Delta x^3}{2} TA^2 e^{Q\Delta x},$$

on trouvera pour le δy_n total

$$\delta y_n < \frac{\Delta x^3}{2} e^{Q\Delta x} A^2 T \left\{ \frac{[1 + e^{Q\Delta x}(Q + AT)\Delta x]^n - 1}{e^{Q\Delta x}(Q + AT)} \right\}.$$

Ainsi l'erreur, dans ce cas, est de l'ordre de Δx^2. On voit que dans le cas où les fonctions A et T sont très petites, cette erreur est aussi très petite si $Q\Delta x$ n'est pas très grand.

Si l'on peut reconnaître que la fonction $\frac{df(x, y)}{dy}$ dont le maximum numérique est Q reste positive dans l'étendue du rectangle que nous considérons; alors si Q_1 est le minimum numérique de cette fonction, on aura

$$e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} < e^{-Q_1(x_{r+1} - x)},$$

et par suite

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} dx < \frac{1 - e^{-Q_1 \Delta x}}{Q_1};$$

on peut donc poser

$$\delta y_n < \frac{\Delta x}{2} A^2 T \left\{ \frac{[1 + e^{Q\Delta x}(Q + AT)\Delta x - 1]^n}{e^{Q\Delta x}(Q + AT)} \right\} \left(\frac{1 - e^{-Q_1 \Delta x}}{Q_1} \right),$$

On peut remarquer que dans beaucoup de questions de mécanique qui se rapportent à des mouvements qui tendent vers un état stable, on appliquera facilement les formules précédentes parce qu'on connaît *à priori* une limite que la variable y ne peut dépasser, et qu'ainsi on peut tracer le rectangle dans l'intérieur duquel le point donné par les coordonnées x et y sera toujours compris.

On pourrait étendre les considérations précédentes à un système d'équations différentielles simultanées, ainsi que M. Cauchy l'a fait pour le cas où l'on emploie pour équations aux différences celles qui sont fournies par le changement des d en Δ : les formules devenant très compliquées, nous n'avons pas cru devoir les présenter ici.